

1. Zenek podczas zawodów biegnie z prędkością

$$v_Z(t) = 8e^{-0,02t} [m/sec], \quad t \geq 0.$$

Znajdź przyspieszenie Zenka w chwili $t = 50$.

2. Załóżmy, że na początku eksperymentu liczebność kultury bakterii $P(0)$ jest równa 10000. Przyjmujemy, że liczebność bakterii podwaja się po upływie 15 minut oraz że wzrost populacji jest wykładniczy:

$$\begin{aligned} P(t+15) &= 2P(t), \quad t \geq 0, \\ P(t) &= 10000a^t = 10000e^{\ln at} = 10000e^{bt}, \end{aligned}$$

gdzie $1 \neq a > 0$ i $b = \ln a$. Chcemy znaleźć:

- prędkość zmiany liczebności bakterii dla $t = 15$ i $t = 40$ (jednostką pomiaru czasu jest minuta);
 - liczebność populacji dla wartości zmiennej t z podpunktu (a).
3. Jesteśmy zainteresowani znalezieniem zależności pomiędzy masą atomów izotopu potasu $K-43$ a czasem, który upłynął od początku eksperymentu. Masa początkowa tej substancji wynosi $R(0) = 30mg$, czas połowicznego rozpadu 20h. Liczba atomów promieniotwórczego potasu maleje wykładniczo:

$$R(t) = 30e^{-kt}.$$

Chcemy znaleźć prędkość rozpadu po 5, 10 i 18 godzinach.

4. Znajdź pochodne funkcji:

- $f_1(x) = 2^x - 3^x$ na przedziale $I = (-\infty, \infty)$;
- $f_2(x) = \frac{2^x - 3^x}{2^x + 3^x}$ na przedziale $I = (-\infty, \infty)$;
- $f_3(x) = x \ln x$ na przedziale $I = (0, \infty)$;
- $f_4(x) = \ln(x-1)$ na przedziale $I = (1, \infty)$;
- $f_5(x) = (2+x)^6$ na przedziale $I = \mathbb{R}$;
- $f_6(x) = e^{-x^2} + \ln x$ na przedziale $I = (0, \infty)$.

5. Po zastosowaniu zastrzyku domięśniowego, stężenie lekařstwa w krwiobiegu pacjenta po czasie t określone jest wzorem

$$C(t) = \frac{0,2t}{t^2 + 4t + 4}, \quad 0 \leq t \leq 10.$$

Oblicz wartość argumentu t_0 , dla którego stężenie jest maksymalne. Określ przedziały, na których funkcja C jest monotoniczna.

6. Po zastosowaniu zastrzyku domięśniowego, stężenie penicyliny w krwiobiegu pacjenta po czasie t określone jest wzorem

$$C(t) = 6e^{-0,2t} - 6e^{-0,3t} \left[\frac{\mu g}{\mu l} \right].$$

Czas t jest wyrażony w godzinach. Oblicz wartość argumentu t_0 , dla którego stężenie jest maksymalne. Określ przedziały, na których funkcja C jest monotoniczna.

Uwaga Zadanie nawiązuje do przykładu 8.1.2 z książki:

T.L. Cornette i Ralph A. Ackerman, *Calculus for the Life Sciences: A Modeling Approach*, t.1. Rozdział 8-my tego podręcznika można pobrać ze strony:

http://cornette.public.iastate.edu/V_I_08_der_appl.pdf

7. Określ przedział, na którym funkcja f dana wzorem

$$f(x) = e^{-bx}x,$$

gdzie b jest ustaloną liczbą dodatnią, jest rosnąca.

Uwaga Funkcja f może być zastosowana do opisu stężenia lekarstwa krwiobiegu w zależności od czasu, por. Przykład 8.1.3 w rozdziale ósmym cytowanego wyżej podręcznika Cornette’a i Ackermana.

8. Napisz równania stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach:

(a) $f(x) = e^x$, $(0, 1)$;

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $(2, \frac{1}{2})$.

Sporządź odpowiednie rysunki.

9. Znajdź drugą pochodną funkcji

(a) $f_1(x) = x^3$ na przedziale $\mathbf{I} = \mathbb{R}$;

(b) $f_2(x) = e^x + x$ na przedziale $\mathbf{I} = \mathbb{R}$.

Uzasadnij, że funkcje te są wypukłe na wskazanych przedziałach.

10. Uzasadnij, że funkcja $\phi_{\mu,\sigma}$ dana wzorem

$$\phi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right],$$

gdzie $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in (0, \infty)$,

(a) jest rosnąca na $(-\infty, \mu)$;

(b) jest malejąca na (μ, ∞) ;

(c) ma maksimum lokalne (i globalne) w punkcie $x = \mu$;

(d) jest wypukła na przedziałach $(-\infty, \mu - \sigma)$; i $(\mu + \sigma, \infty)$;

(e) jest wklęsła na przedziale $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$;

(f) ma punkty przegięcia: $(\mu - \sigma, \phi_{\mu,\sigma}(\mu - \sigma))$ i $(\mu + \sigma, \phi_{\mu,\sigma}(\mu + \sigma))$.

Naszkicuj wykres funkcji $\phi_{\mu,\sigma}$ dla $\mu = 2$ i $\sigma = 1$.

Mariusz Grządziel