1 Rok Bezp. Żywności/Biologii/Biol. Człowieka/ Bioinformatyki/Zoot.;Matematyka — lista 4; 17.11.2014

1. Znajdź asymptotę poziomą w $-\infty$ funkcji $f(x) = e^x + 3$.

2. Liczebność populacji pewnych gatunków zwierząt można opisać za pomocą funkcji logistycznej określonej wzorem:
$$f(t) = \frac{a}{1 + be^{-ct}},$$
gdzie $a > 0$, $b > 0$ i $c > 0$ są pewnymi stałymi („parametrami trendu logistycznego"); zmienna $t$ jest rozumiana jako czas.
   (a) Znajdź asymptoty poziome w $-\infty$ i $\infty$ funkcji $f$;
   (b) naszkicuj przebieg funkcji $f$ dla parametrów $a = 2, b = 20$ i $c = 4$.

3. Oblicz $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ dla :
   (a) funkcji $f(x) = c$ i $x_0 \in \mathbb{R}$, gdzie $c$ jest ustaloną liczbą rzeczywistą.
   (b) funkcji $f(x) = x^3$ i $x_0 \in \mathbb{R}$;
   (c) funkcji $f(x) = x^3 + 1$ i $x_0 \in \mathbb{R}$;
   (d) funkcji $f(x) = x^{-1}$ i $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4. Funkcja *signum*, oznaczana przez $sgn$, określona jest wzorem:
$$sgn(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 1. \end{cases}$$
   (a) Oblicz granice: prawostronną i lewostronną funkcji *signum* w punkcie $x_0 = 0$.
   (b) Uzasadnij, że funkcja *signum* jest ciągła na $(0, \infty)$.
   (c) Uzasadnij, że funkcja ta nie jest ciągła na $(-\infty, \infty)$.

   **Uwaga** W tym zadaniu, a także w zadaniach 5-tym i 6-tym, należy skorzystać z twierdzenia 4-go z wykładu 4-go.

5. Wyznacz stałe $a$ i $b$ takie, że funkcja $f$ dana wzorem
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < -2, \\ ax + b, & -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ x^3 + 1, & x > 0 \end{cases}$$
jest ciągła na $(-\infty, \infty)$. Naszkicuj wykres funkcji $f$.

   **Uwaga** W zadaniu należy skorzystać z faktu, że funkcja wielomianowa jest ciągła na przedziale $(-\infty, \infty)$.

6. Wyznacz stałe $a$ i $b$ takie, że funkcja $f$ dana wzorem
$$f(x) = \begin{cases} 2^x - 1, & x < -2, \\ ax + b, & -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ x^3 + 1, & x > 0. \end{cases}$$
jest ciągła na przedziale $(-\infty, \infty)$. Naszkicuj wykres funkcji $f$.

   **Uwaga** W zadaniu należy skorzystać z faktu, że funkcje wykładnicza oraz wielomianowa są ciągłe na przedziale $(-\infty, \infty)$.

7. (a) Niech $S(t)$ oznacza położenie na osi punktu materialnego poruszającego się wzdłuż osi $OX$ w chwili $t$. Podać interpretację fizyczną ilorazu różnicowego

$$\frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}$$

oraz pochodnej $S'(t_0)$.

(b) Niech $v(t)$ oznacza szybkość punktu materialnego poruszającego się wzdłuż osi $OX$ w chwili $t$. Podać interpretację fizyczną ilorazu różnicowego

$$\frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}$$

oraz pochodnej $v'(t_0)$.

*Mariusz Grządziel*