

Wykład 10 i 11: Całka oznaczona: metody obliczania, zastosowania

dr Mariusz Grządział

semestr zimowy; rok akademicki 2014/2015

Definicja całki oznaczonej dla funkcji ciągłej

Definicja 1. Załóżmy, że funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$. Całkę oznaczoną z funkcji ciągłej f na przedziale $[a, b]$ definiujemy wzorem

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f \left(a + (k-1) \frac{b-a}{n} \right) \right]. \quad (1)$$

Korzystając z wprowadzonej notacji, pole „trójkąta parabolicznego” można wyrazić następująco:

$$\int_0^1 x^2 dx.$$

Obliczanie całek - wielomiany

Niech $W(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$.

$$\int W(x)dx = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + C$$

Obliczanie całek - funkcje wykładnicze

Dla $b \neq 0$:

$$\int e^{bt} dt = \frac{1}{b} e^{bt} + C$$

Całka iloczynu funkcji wykładniczej i wielomianu

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C,$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$$

Postępując podobnie: obliczamy całki $\int x^m e^x dx$, $m = 3, 4, \dots$

Komentarz: całkowanie to raczej sztuka niż „automatyczne” stosowanie kilku reguł obliczeniowych.

Całkowanie funkcji wymiernych

Dla funkcji

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

gdzie P i Q są wielomianami, całkę $\int f(x)dx$ możemy obliczyć korzystając z metod przedstawionych w książce K. Kuratowskiego w podrozdziale 9.4. Algorytm obliczania całek $\int f(\sin x)dx$, $\int f(\cos x)dx$ itd. można znaleźć w podrozdziale 9.6 tej książki.

Przykłady całek nieoznaczonych, których nie można obliczyć przy użyciu standardowych metod

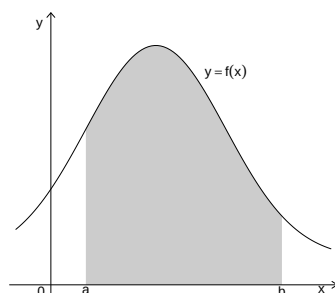
Następujących całek nie da się przedstawić za pomocą funkcji elementarnych

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \sin(\cos x) dx.$$

Uwaga. Przybliżoną wartość całki oznaczonej $\int_a^b \sin(\cos x) dx$ dla zadanych a i b możemy obliczyć przy użyciu metod numerycznych.

Zastosowania całki oznaczonej— pole trapezu krzywoliniowego

Figurę ograniczoną: wykresem funkcji f , gdzie f jest funkcją ciągłą i nieujemną na przedziale $[a, b]$, prostymi $x = a$, $x = b$ oraz prostą $y = 0$ będziemy nazywać trapezem krzywoliniowym.



Rysunek 1: Trapez krzywoliniowy

Zastosowania całki oznaczonej— obliczanie pola figur

Chcemy obliczyć pole figury ograniczonej przez: wykres funkcji $f(x) = \sin x$ oraz proste: $x = 0$, $x = \pi$ i $y = 0$, tj. chcemy znaleźć pole trapezu krzywoliniowego odpowiadającego funkcji $f(x) = \sin x$ i odcinkowi $[0, \pi]$.

Pole to jest równe:

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2.$$

Zastosowania całki oznaczonej— obliczanie pola figur

Chcemy obliczyć pole figury ograniczonej przez: wykres funkcji $f(x) = \sin 2x$ oraz proste: $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ i $y = 0$, tj. chcemy znaleźć pole trapezu krzywoliniowego odpowiadającego funkcji $f(x) = \sin 2x$ i odcinkowi $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Pole to jest równe:

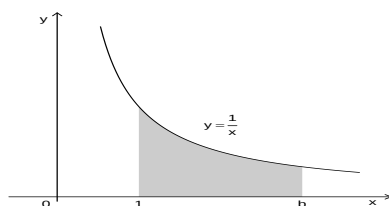
$$\int_0^{\pi/2} \sin 2x dx = \left[-\frac{1}{2} \cos 2x\right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{2} \cos \pi - \left(-\frac{1}{2} \cos 0\right) = 1.$$

Zastosowania całki oznaczonej— obliczanie pola figur— c.d.

Chcemy obliczyć pole figury ograniczonej przez: wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ oraz proste: $x = 1$, $x = b$ i $y = 0$, gdzie $b > 1$, tj. chcemy znaleźć pole trapezu krzywoliniowego odpowiadającego funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ i odcinkowi $[1, b]$.

Pole to jest równe:

$$\int_1^b \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^b = \ln b - \ln 1 = \ln b.$$

Zastosowania całki oznaczonej— obliczanie pola figur— c.d.

Rysunek 2: Logarytm naturalny liczby $b > 1$ jako pole trapezu krzywoliniowego odpowiadającemu funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ i odcinkowi $[1, b]$.

Zastosowania całki oznaczonej— droga przebyta przez punkt materialny

Punkt materialny porusza się z prędkością $v(t) = \cos t$. Chcemy znaleźć $s(T)$, położeniu punktu w czasie $T = \pi$. Zakładamy, że $s(0) = 0$.

Mamy

$$s(\pi) = \int_0^{\pi} \cos t dt = [-\sin t]_0^{\pi} = 0 - 0 = 0.$$

Zastosowania całki oznaczonej— droga przebyta przez punkt materialny— c.d.

Zenek podczas zawodów biegnie z prędkością

$$v_Z(t) = 8e^{-0.01t} [m/sec], \quad t \geq 0.$$

Chcemy znaleźć dystans przebyty przez Zenka do chwili $T = 100$.

Droga przebyta przez Zenka (chwili $T = 100$) jest równa:

$$\begin{aligned} \int_0^{100} v_Z(t) dt &= \left[8 \frac{1}{-0.01} e^{-0.01t} \right]_0^{100} = \\ &= \left[-\frac{8}{0.01} e^{-0.01t} \right]_0^{100} = -800(e^{-1} - 1) = 800(1 - e^{-1}) \approx 505,6964. \end{aligned}$$

Zastosowania całki oznaczonej— środek ciężkości pręta

Rozważmy cienki pręt. Skierujmy oś OX wzdłuż pręta. $\rho = \rho(x)$ — masa przypadająca na jednostkę długości pręta. Na odcinku $[x, x + \Delta x]$ znajduje się (w przybliżeniu): masa:

$$\Delta m = \rho \Delta x$$

ρ - gęstość na jednostkę długości (lub krócej gęstość).

Masa pręta

Problem: chcemy obliczyć masę pręta

Pręt- wzdłuż osi OX

a - lewy koniec; b - prawy koniec.

Przybliżona wartość masy pręta:

$$M_n = h \sum_{i=1}^n \rho((i-1)h),$$

gdzie $h = \frac{b-a}{n}$. Jeśli założymy, że $\rho = \rho(x)$ jest ciągła, to masa pręta jest równa:

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \int_a^b \rho(x) dx.$$

Środek ciężkości układu punktów materialnych

Środek ciężkości układu dwóch punktów

Punkty P_1 i P_2 leżą na prostej OX ;

P_1 — waga w_1 ; współrzędna x_1 ;

P_2 — waga w_2 ; współrzędna x_2 .

Środek ciężkości: $\frac{w_1 x_1 + w_2 x_2}{w_1 + w_2}$

Środek ciężkości układu punktów $P_1, P_2, \dots, P_n$ o współrzędnych $x_1, x_2, \dots, x_n$ i wagach $w_1, w_2, \dots, w_n$:

$$\frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i}.$$

Środek ciężkości pręta

Pręt „leżący na osi OX ”;

a i b ; $a < b$;

ρ - gęstość (na jednostkę długości);

Przybliżona wartość współrzędnej poziomej środka ciężkości:

$$S_n = \frac{\sum_{i=1}^n [a + (i-1)h] \rho(a + (i-1)h) h}{\sum_{i=1}^n \rho(a + (i-1)h) h}$$

gdzie $h = (b - a)/n$.

S_n jest środkiem ciężkości układu punktów o współrzędnych

$$a, a + h, a + 2h, \dots, a + (n - 1)h$$

o wagach

$$h\rho(a), h\rho(a + h), \dots, h\rho(a + (n - 1)h).$$

Środek ciężkości pręta— c.d.

Można pokazać, że środek ciężkości pręta (jego współrzędna pozioma) jest równy:

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\int_a^b x\rho(x)dx}{\int_a^b \rho(x)dx}$$

przy założeniu, że ρ jest funkcją ciągłą na $[a, b]$.

Przykład

Chcemy obliczyć środek ciężkości pręta „położonego wzdłuż osi OX” o końcach $a = 0$, $b = 1$ [jednostka: m] o gęstości $\rho(x) = x^2$ [jednostka: kg/m].

Rozwiązanie

$$\frac{\int_a^b x\rho(x)dx}{\int_a^b \rho(x)dx} = \frac{\int_0^1 x^3 dx}{\int_0^1 x^2 dx} = \frac{1/4}{1/3} = \frac{3}{4}.$$

Moment bezwładności pręta

Można pokazać, że moment bezwładności pręta o końcach a i b względem osi $x = c$ jest równy

$$\int_a^b (x - c)^2 \rho(x) dx$$

przy założeniu, że ρ jest funkcją ciągłą na $[a, b]$.

Przykład Moment bezwładności pręta o końcach: $a = -0,5$ i $b = 0,5$ [jednostka: m]

względem osi przechodzącej przez środek pręta (tzn. względem osi $x = 0$), dla gęstości $\rho(x) = 1$ [jednostka: kg/m], jest równy:

$$\begin{aligned} \int_{-0,5}^{0,5} (x - 0)^2 \rho(x) dx &= \int_{-0,5}^{0,5} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-0,5}^{0,5} = \\ &= \frac{1}{24} - \left(-\frac{1}{24} \right) = \frac{1}{12} [m^2 kg] \end{aligned}$$