

Wykłady 12 i 13. Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa

dr Mariusz Grządział

semestr zimowy, rok akademicki 2014 – 2015

Doświadczenie losowe

Doświadczenie nazywamy losowym, jeśli:

- może być powtarzane (w zasadzie) w tych samych warunkach;
- wynik jego nie może być przewidziany w sposób pewny;
- zbiór wszystkich możliwych wyników doświadczenia jest określony przed przeprowadzeniem doświadczenia.

Przykłady doświadczeń losowych

- Losowy wybór mieszkania z listy mieszkań oferowanych do sprzedaży.
- Dwukrotny rzut monetą.
- Dwukrotny rzut kostką.

Przestrzeń zdarzeń elementarnych

Definicja 1. *Przestrzenią zdarzeń elementarnych nazywamy zbiór wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego. Pojedynczy element tej przestrzeni nazywać będziemy zdarzeniem elementarnym.*

Dowolny podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych o skończonej liczbie elementów będziemy nazywać zdarzeniem. W przypadku przestrzeni zdarzeń elementarnych o nieskończonej liczbie elementów, zdarzeniem nazywamy podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych spełniający pewne dodatkowe założenia.

Uwaga Niektórzy autorzy określają zdarzenie jako dowolny podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych (jest to sensowne uproszczenie — dla celów dydaktycznych).

Przestrzeń zdarzeń elementarnych- przykłady

Przestrzenią zdarzeń elementarnych dla doświadczenia losowego :

- polegającego na losowym wyborze mieszkania, oferowanego do sprzedaży, i podaniu jego ceny jest $[0, \infty)$;
- polegającego na dwukrotnym rzucie monetą jest $\{OO, OR, RO, RR\}$; zapis OO oznacza: orzeł wypadł w pierwszym i drugim rzucie itd.;
- polegającego na dwukrotnym rzucie kostką jest $\{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$.

Czym jest prawdopodobieństwo

Podejście aksjomatyczne: każdemu zdarzeniu A , będącemu podzbiorem przestrzeni zdarzeń elementarnych $\mathcal{S}$ przyporządkujemy liczbę $P(A)$, spełniającą warunki:

- $0 \leq P(A) \leq 1$;
- gdy $A = \emptyset$, $P(A) = 0$;
- gdy $A = \mathcal{S}$, $P(A) = 1$;
- Jeśli zdarzenia $A_1, A_2, A_3, \dots$ się wzajemnie wykluczają (tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$) i suma $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$ jest zdarzeniem, to

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$

Prawdopodobieństwo— przykład

Rzucamy dwukrotnie kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma oczek będzie mniejsza lub równa 3.

W naszym przypadku $\mathcal{S} = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$; przyjmujemy, że prawdopodobieństwo wszystkich zdarzeń elementarnych jest równe $\frac{1}{6 \times 6} = \frac{1}{36}$. Zdarzenie A , odpowiadające wyrzuceniu nie więcej niż 3 oczek, ma postać: $A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$. Stąd $P(A) = 3 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{12}$.

Założenie o jednakowym prawdopodobieństwie zdarzeń elementarnych

Uwaga. Z formalnego punktu widzenia moglibyśmy przyjąć w rozważanym przykładzie np.

$$P((1, 1)) = P((1, 2)) = \frac{1}{2}, \quad P((1, 3)) = P((1, 4)) = \dots = P((6, 6)) = 0,$$

lecz otrzymany w ten sposób model matematyczny nie będzie „sensownie” opisywał naszego doświadczenia losowego.

Niezależność zdarzeń

Niezależność zdarzeń wiążemy z brakiem zależności przyczynowo- skutkowej. Można uznać za niezależne:

- wyniki kolejnych rzutów kostką;
- ustanowienie rekordu świata w skoku w dal na najbliższej olimpiadzie i utworzenie nowego województwa do końca bieżącego roku

Definicja 2. Mówimy, że zdarzenia A i B są niezależne, jeżeli

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Niezależność dla więcej niż dwóch zdarzeń— patrz [KM01], Definicja 2.7.

Niezależność zdarzeń— przykłady

W przykładzie z rzutem dwoma kostkami: zdarzenie A — „wynik pierwszego rzutu jest równy jeden” i zdarzenie B — „wynik drugiego rzutu jest równy pięć” są niezależne, gdyż

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{6} \text{ oraz } P(A \cap B) = P((1, 5)) = \frac{1}{36}.$$

Pojęcie zmiennej losowej

Nieformalne określenie— wynik liczbowy doświadczenia losowego.

Przykładami zmiennej losowej są: suma oczek otrzymanych po dwukrotnym rzucie kostką; cena losowo wybranego mieszkania (z listy mieszkań oferowanych do sprzedaży); temperatura człowieka, zmierzona w losowo wybranej chwili.

Precyzyjne określenie zmiennej losowej — przypadek, gdy przestrzeń zdarzeń elementarnych jest skończona: funkcja określona na przestrzeni zdarzeń elementarnych.

Zmienna losowa— przykład

Rzucamy dwukrotnie kostką. Niech X — suma oczek; X — przykład zmiennej losowej. X przyjmuje wartości $2, 3, \dots, 11, 12$ z prawdopodobieństwami:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Funkcja przyporządkowująca $k \in \{2, 3, \dots, 11, 12\}$ prawdopodobieństwo $P(X = k)$ — rozkład zmiennej X . Notacja: $X = k$ —zbiór zdarzeń elementarnych ω takich, że $X(\omega) = k$. Analogicznie: $X < k$ —zbiór zdarzeń elementarnych ω takich, że $X(\omega) < k$.

Definicja 3. Zmienną losową nazywamy dyskretną (skokową), jeśli zbiór jej wartości $x_1, x_2, \dots$, można ustawić w ciąg.

W pewnych podręcznikach można znaleźć bardziej ogólną definicję dyskretnej zmiennej losowej.

G. Cantor (1873): wszystkich liczb rzeczywistych nie da się ustawić w ciąg.

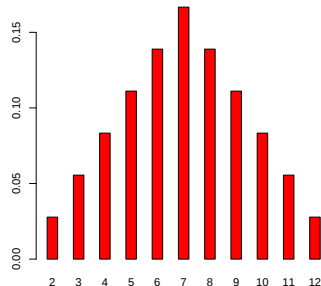
Rozkład dyskretnej zmiennej losowej

Zbiór wartości dyskretnej zmiennej losowej X — ciąg $x_1, x_2, \dots$, (skończony lub nieskończony).

Rozkład zmiennej losowej dyskretnej X jest określony przez nieujemne liczby $p_1, p_2, \dots$ spełniające warunki:

$$\sum p_i = 1, \tag{1}$$

$$p_i = P(X = x_i). \tag{2}$$



Rysunek 1: Wykres słupkowy przedstawiający rozkład zmiennej losowej X , sumy oczek otrzymanych w dwukrotnym rzucie kostką

Rzuty osobiste— przykład

Niech X - liczba trafień w wykonywanym przez koszykarza A rzucie osobistym. Niech: T odpowiada trafieniu do kosza, C odpowiada chybieniu.

Przestrzeń zdarzeń elementarnych: $\mathcal{S} = \{C, T\}$.

Niech X - liczba trafionych rzutów. Zmienna X jest funkcją określoną na $\mathcal{S}$;

$$X(C) = 0, \quad X(T) = 1.$$

Zakładamy, że prawdopodobieństwo trafienia wynosi 0,9. Rozkład zmiennej losowej X można przedstawić przy pomocy tabelki:

k	0	1
$P(X = k)$	0,1	0,9

Liczba trafień Y w dwóch rzutach

Niech Y - liczba trafień w dwóch wykonywanych przez koszykarza A rzutach osobistych. Przyjmujemy, że prawdopodobieństwo trafienia w jednym rzucie osobistym wynosi 0,9 i zdarzenie trafienia/chybienia w drugim rzucie jest niezależne od analogicznego zdarzenia w pierwszym rzucie.

Można pokazać, że:

$$P(Y = 0) = \left(\frac{1}{10}\right)^2 = 0,01,$$

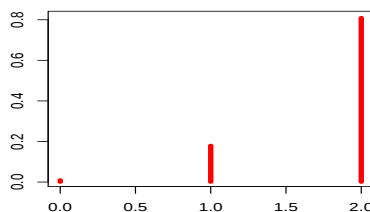
$$P(Y = 1) = 2 \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} = 0,18,$$

$$P(Y = 2) = \left(\frac{9}{10}\right)^2 = 0,81.$$

Liczba trafień Y w dwóch rzutach— c.d.

Rozkład można przedstawić w postaci tabelki lub wykresu słupkowego:

k	0	1	2
$P(X = k)$	0,01	0,18	0,81



Rozkład dwumianowy

Symbol Newtona $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ jest równy liczbie podzbiorów k -elementowych zbioru n -elementowego ($0 \leq k \leq n$).

Definicja 4. Mówimy, że zmienna losowa X ma rozkład dwumianowy z parametrami $n \in \mathbb{N}$ i $0 < p < 1$, co w skrócie zapisujemy $X \sim \text{Bin}(n, p)$ (lub $X \sim \text{Bin}(n; p)$), jeśli

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

„Dziesięciokrotny rzut monetą”— przykład

Niech V oznacza liczbę orłów otrzymanych w dziesięciokrotnym rzucie monetą (zakładamy, że moneta jest „rzetelna”, tj. prawdopodobieństwo otrzymania orła jest równe $\frac{1}{2}$ oraz że wyniki kolejnych rzutów są od siebie niezależne). Chcemy obliczyć prawdopodobieństwo;

$$P(V \geq 9).$$

Rozwiązanie $V \sim \text{Bin}(10; 0,5)$,

$$\begin{aligned} P(V \geq 9) &= P(V = 9) + P(V = 10) = \\ &= \binom{10}{9} (0,5)^9 (0,5)^1 + \binom{10}{10} (0,5)^{10} (0,5)^0 = \\ &= \frac{10}{1024} + \frac{1}{1024} = \frac{11}{1024}. \end{aligned}$$

Pojęcie dystrybuanty rozkładu

W obliczeniach podobnych do tych z poprzedniego przykładu użyteczne może się okazać pojęcie dystrybuanty zmiennej losowej.

Definicja 5. Niech X będzie dowolną zmienną losową. Dystrybuantą zmiennej losowej X nazywamy funkcję F określoną jako:

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Uwaga. W powyższej definicji nie zakładamy, że zmienna X jest dyskretna.

„Dziesięciokrotny rzut monetą”—c.d.

V -liczba wyrzuconych orłów w dziesięciokrotnym rzucie monetą;

$$P(V \geq 9) = P(V = 9) + P(V = 10) = F_V(10) - F_V(8)$$

gdzie F_V jest dystrybuantą zmiennej losowej V .

Obliczenia wykonane w R-rze:

```
> pbinom(10, 10, 0.5) - pbinom(8, 10, 0.5)
[1] 0.01074219
```

`pbinom`- pierwsza litera odpowiada „dystrybuancie”, `binom` odpowiada rodzajowi rozkładu (ang. *binomial*- dwumianowy). Korzystając z polecenia `pbinom` można obliczać wartości dystrybuanty rozkładu $\text{Bin}(n, p)$ dla dużych wartości n .

Lektura uzupełniająca

Podrozdział 2.1.2, str. 62-79, w:

[KM01] Koronacki, J., Mielniczuk, J. Statystyka dla studentów kierunków technicznych i przyrodniczych. WNT. Warszawa 2001.