Wykłady 14 i 15. Zmienne losowe typu ciągłego

dr Mariusz Grządziel

r. akad. 2014 – 2015

Pole trapezu krzywoliniowego
Przypomnienie: figurę ograniczoną przez:

- wykres funkcji $y = f(x)$, gdzie f jest funkcją ciągłą i nieujemną;
- proste $x = a$, $x = b$, $a < b$,
- oś OX (tj. prostą $y = 0$)

będziemy nazywać *trapezem krzywoliniowym* (odpowiadającym funkcji f oraz odcinkowi $[a, b]$).
Pole tej figury można przedstawić w postaci całki:

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Pole „nieograniczonego" trapezu krzywoliniowego-całka niewłaściwa
Problem: jesteśmy zainteresowani polem figury ograniczonej: wykresem funkcji $f(x) = e^{-x}$ oraz prostymi $y = 0$, $x = 0$.
Pole tego obszaru można określić jako całkę:

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T f(x)dx.$$

Korzystając z faktu:

$$\int_0^T e^{-x}dx = -e^{-T} + e^0 = 1 - e^{-T}$$

można uzasadnić, że granica ta jest równa 1.

Całka niewłaściwa z funkcji nieujemnej
Całkę niewłaściwą z funkcji nieujemnej f na półprostej $[a, \infty)$ można określić jako granicę:

$$\lim_{T\to\infty} \int_a^T f(t)dt$$

jeśli ona istnieje.
Analogicznie można całkę niewłaściwą z funkcji nieujemnej f na półprostej $(-\infty, b]$.
Całkę niewłaściwą z funkcji nieujemnej f na prostej $(-\infty, \infty)$ można określić jako granicę $\lim_{T\to\infty} \int_{-T}^T f(t)dt$, jeśli ona istnieje.

Zmienne losowe typu ciągłego

Definicja 1. *Mówimy, że zmienna losowa X jest typu ciągłego, jeśli istnieje nieujemna funkcja g taka, że dla każdych liczb a i b spełniających warunek $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ zachodzi równość*

$$P(a < X < b) = \int_a^b g(x)dx.$$

Rozkład jednostajny na odcinku $[0, 1]$
Przykładem zmiennej losowej typu ciągłego jest rozkład jednostajny na odcinku $[0, 1]$ (oznaczenie: $U(0, 1)$). Jego funkcja gęstości u dana jest wzorem

$$u(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{jeśli } x < 0 \text{ lub } x > 1. \end{cases}$$

Rozkład ten może opisywać np. czas oczekiwania na autobus A, odjeżdżający do miejscowości B co godzinę, przez pasażera C; zakładamy, że C nie zna rozkładu jazdy dla tej linii i że przychodzi na przystanek w losowym momencie.

Rozkład jednostajny na odcinku $[0,1]$ — przykład obliczeń
Czas oczekiwania na autobus — zmienna losowa $Y \sim U(0,1)$. Prawdopodobieństwo $P\left(\frac{1}{3} < Y < \frac{1}{2}\right)$ jest równe:

$$P\Big(\frac{1}{3} < Y < \frac{1}{2}\Big) = \int_{1/3}^{1/2} 1dx = \Big[x\Big]_{1/3}^{1/2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Prawdopodobieństwa odpowiadające nierównościom ostrym i słabym
Dla zmiennej losowej X o rozkładzie typu ciągłego mamy:

$$P(a < X < b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X \leqslant b).$$

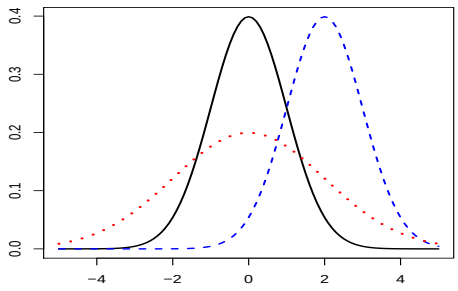
Równość ta wynika z własności całki oznaczonej.

Rozkład normalny
Szczególnie ważnym w zastosowaniach jest rozkład normalny.

Definicja 2. *Mówimy, że zmienna losowa X ma rozkład normalny z parametrami μ i σ, gdzie $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$, jeżeli gęstość jej rozkładu jest określona wzorem:*

$$\phi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Skrótowy zapis: $X \sim N(\mu, \sigma)$. Dla $\mu = 0$ i $\sigma = 1$ będziemy pisać zamiast $\phi_{0,1}(x)$ krótko $\phi(x)$.



Rysunek 1: Wykresy gęstości rozkładów normalnych: $N(0,1)$ (linia ciągła), $N(0,2)$ (linia „kropkowana"), $N(2,1)$ (linia „kreskowana").

Rozkład normalny— zastosowania
Wiele cech (zmiennych losowych) w życiu gospodarczym i w świecie przyrody ma rozkład zbliżony do normalnego. Wynika to z tzw. centralnego twierdzenia granicznego, z którego wynika, że średnia $\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$, gdzie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, ma rozkład zbliżony do normalnego $N(\mu, \sigma)$ dla pewnych μ i σ (przy pewnych założeniach, które zazwyczaj są spełnione). Dokładniejsze sformułowanie tego twierdzenia wymaga określenia wartości oczekiwanej i wariancji zmiennej losowej, por. [KM01, str. 141].

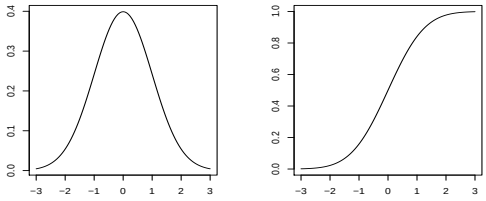
Rozkładzie normalnym $N(0,1)$ — obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń
Dla $a < b$ prawdopodobieństwo $P(a < X < b)$, gdzie $X \sim N(0,1)$ jest równe:

$$P(a < X < b) = \int_a^b \phi(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a),$$

gdzie Φ jest określona przez:

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \phi(x)dx.$$

Funkcja Φ jest dystrybuantą rozkładu normalnego $N(0,1)$. Funkcji Φ nie da się wyrazić za pomocą skończonej liczby działań na podstawowych funkcjach elementarnych — stąd potrzeba sporządzania tablic statystycznych zawierających wartości funkcji Φ (można je znaleźć w prawie każdym podręczniku statystyki).



Rysunek 2: Wykresy gęstości ϕ rozkładu normalnego (z lewej strony) $N(0,1)$ i dystrybuanty rozkładu normalnego Φ (z prawej strony)

Własności funkcji Φ
Można pokazać, że $\Phi(0) = 0{,}5$ oraz $\Phi(t) = 1 - \Phi(-t)$ dla dowolnego t; stąd można się ograniczyć do tablicowania funkcji Φ dla $t \geqslant 0$.

Rozkład normalny — obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń
Można pokazać, że jeśli $X \sim N(\mu, \sigma)$, to

$$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1).$$

Stąd dla $a < b$ prawdopodobieństwo $P(a < X < b)$, $X \sim N(\mu, \sigma)$, jest równe:

$$P(a < X < b) = P\Big(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\Big) = \Phi\Big(\frac{b-\mu}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{a-\mu}{\sigma}\Big).$$

Przykład rachunkowy
Niech X oznacza wzrost dorosłych mężczyzn w państwie A; zakładamy, że $X \sim N(177, 10)$. Chcemy obliczyć: (a) $P(174 < X < 182)$, (b) $P(X > 182)$. Obliczenia dla (a):

$$\begin{aligned} P(174 < X < 182) &= \Phi\Big(\frac{182-177}{10}\Big) - \Phi\Big(\frac{174-177}{10}\Big) = \\ &= \Phi(0{,}5) - \Phi(-0{,}3) = \Phi(0{,}5) - (1 - \Phi(0{,}3)) = \\ &= \Phi(0{,}5) + \Phi(0{,}3) - 1 \approx 0{,}6915 + 0{,}6179 - 1 = 0{,}3094. \end{aligned}$$

Obliczenia dla (b) można przeprowadzić w analogiczny sposób, korzystając z równości:

$$P(X > 182) = 1 - P(X < 182) = 1 - \Phi\Big(\frac{182-175}{10}\Big) = 1 - \Phi(0{,}5).$$

Inne rozkłady ciągłe
Dowolna funkcja g spełniająca warunki:

- dziedziną funkcji g jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$,
- $g(x) \geqslant 0$ dla $x \in \mathbb{R}$,
- $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) = 1$,

jest funkcją gęstością pewnej zmiennej losowej; Poza rozkładem normalnym i rozkładem jednostajnym $U(0,1)$ do opisu cech w życiu gospodarczym i naukach przyrodniczych stosuje się wiele innych rozkładów prawdopodobieństwa.

Gęstość emiryczna — przykład
Dane *normtemp*— zebrane w celu weryfikacji hipotezy mówiącej, że średnia wartość temperatury zdrowego człowieka jest równa $98{,}6$ stopni w skali Fahrenheita ($37{,}0$ stopni w skali Celsjusza). Zbiór danych zawiera pomiary temperatury i tętna (temperatura wyrażona jest w stopniach Fahrenheita). Można go pobrać z odpowiedniego repozytorium a następnie zapisać do zbioru o nazwie np. **t** (tzw. „data frame"). Zbiór **t** składa się z trzech zmiennych: **temperature**, **gender** i **hr**. Aby uczynić naszą prezentację bardziej czytelną, zmieniamy nazwy zmiennych na odpowiednio: **temp**, **plec** i **tetno**. Odpowiednie polecenia systemu R są zapisane w pliku $t.R$. Wydruk tego pliku zamieszczamy poniżej (na następnym slajdzie):

Pobieranie zbioru danych z repozytorium systemu R

```
library(utils)
install.packages("UsingR",
repo="http://cran.r-project.org")
library(UsingR)
t<-normtemp
names(t)<-c("temp","plec","tetno")
```

Dane *normtemp* są również dostępne na stronie

`http://www.stat.ucla.edu/~rgould/m12s01/ttest.pdf`

System (pakiet) R można pobrać pod adresem http://r.meteo.uni.wroc.pl/bin/windows/base/

Pobieranie zbioru danych z repozytorium systemu R

```
> names(t)
[1] "temp"  "plec"  "tetno"
> t[1:10,]
   temp plec tetno
1  96.3    1    70
2  96.7    1    71
3  96.9    1    74
4  97.0    1    80
5  97.1    1    73
6  97.1    1    75
7  97.1    1    82
8  97.2    1    64
9  97.3    1    69
10 97.4    1    70
> sort(temp)
  [1]  96.3  96.4  96.7  96.7  96.8  96.9  97.0  97.1
  [9]  97.1  97.1  97.2  97.2  97.2  97.3  97.4  97.4
                 ...
[129] 100.0 100.8
```

Szereg rozdzielczy

Dla zbioru danych liczbowych $\{y_1, y_2 \ldots, y_N\}$ niech: $MIN1$ oznacza liczbę mniejszą od najmniejszej z liczb $\{y_1, y_2 \ldots, y_N\}$, $MAX1$ oznacza liczbę większą lub równą od największej z liczb $\{y_1, y_2 \ldots, y_N\}$.
$MIN1$ i $MAX1$ mogą być odpowiednimi zaokrągleniami wartości, odpowiednio, minimalnej i maksymalnej rozważanego zbioru danych, $MIN1 < MAX1$.
Podzielmy odcinek $(MIN1, MAX1]$ na k przedziałów (zwanych klasami) o równej długości:

$$(x_0, x_1], (x_1, x_2], \ldots, (x_{k-1}, x_k],$$

gdzie $x_0 = MIN1$, $x_k = MAX1$. Funkcję przyporządkowującą poszczególnym przedziałom liczbę elementów rozważanego zbioru danych do nich należących będziemy nazywać szeregiem rozdzielczym.
Liczbę klas k w szeregu rozdzielczym wyznaczamy na przykład korzystając z wzorów:

$$k \approx log_2 n + 1 \quad \text{lub} \quad k \approx \frac{3\sqrt{n}}{4}.$$

Szereg rozdzielczy: dane NT

Przyjmujemy: $MIN1 = 96$, $MAX1 = 101$, $k = 10 \approx \frac{3\sqrt{130}}{4}$.
Zakładając, że dane dotyczące temperatury zdrowych ludzi znajdują się w zmiennej `t$temp` konstruujemy szereg rozdzielczy w środowisku R:

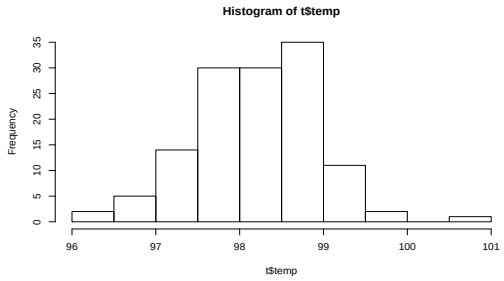
```
> table(cut(t$temp, breaks = c(96,96.5,97,97.5,98,
+ 98.5,99,99.5,100,100.5,101)))
```

```
(96,96.5]   (96.5,97]   (97,97.5]   (97.5,98]
         2           5          14          30
  (98,98.5]   (98.5,99]   (99,99.5]  (99.5,100]
        30          35          11           2
(100,100.5] (100.5,101]
         0           1
```

Szereg rozdzielczy — przedstawiony w formie tabeli

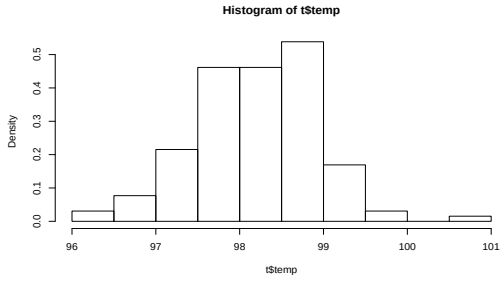
(96,96.5]	(96.5,97]	(97,97.5]	(97.5,98]	(98,98.5]	(98.5,99]	(99,99.5]	(99.5,100]	(100,100.5]	(100.5,101]
2	5	14	30	30	35	11	2	0	1

Histogram: dane NT
Wykres słupkowy odpowiadający szeregowi rozdzielczemu (podstawami prostokątów — słupków są kolejne klasy, ich wysokości są równe liczebnościom odpowiednich klas): histogram liczebności



Rysunek 3: Histogram liczebności dla danych NT odpowiadający szeregowi rozdzielczemu z poprzedniego slajdu

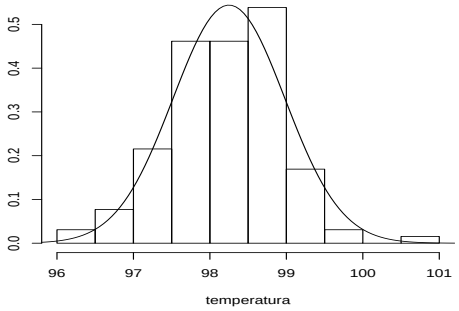
Histogram probabilistyczny i gęstość empiryczna - dane NT
Histogram probabilistyczny: histogram tak wyskalowany, aby "pole pod nim było równe 1": wyskości słupków: $\frac{2}{130\times 0{,}5}, \frac{5}{130\times 0{,}5}, \ldots$; histogram probabilistyczny — przez niektórych definiowany jako funkcja przedziałami ciągła (stała), której wykres "pokrywa się" ze zdefiniowanym wyżej wykresem słupkowym; inna nazwa tak określonej funkcji: gęstość empiryczna.



Rysunek 4: Gęstość empiryczna dla danych NT

Gęstość empiryczna + krzywa normalna

Gęstość empiryczna —funkcja przedziałami ciągła



Rysunek 5: Gęstość empiryczna dla danych NT z dołączonym wykresem gęstości normalnej z parametrami $\mu = 98{,}25$ i $\sigma = 0{,}733$.

$$h(x) = \begin{cases} \frac{2}{130\times 0{,}5}, & \text{dla } x \in (96; 96{,}5] \\ \frac{5}{130\times 0{,}5}, & \text{dla } x \in (96{,}5, 97] \\ \vdots & \\ \frac{1}{130\times 0{,}5}, & \text{dla } x \in (100{,}5; 101] \\ 0, & \text{dla } x \notin (96; 101] \end{cases}$$

Frakcja obserwacji należących do $(96; 97]$;

$$\int_{96}^{97} h(x)dx = \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{130 \times 0{,}5} + \frac{5}{130 \times 0{,}5}\Big) = \frac{7}{130} \approx 0{,}054.$$

Konstrukcja histogramu probabilistycznego (gęstości empirycznej) — przypadek ogólny
W ogólnym przypadku wysokość k-tego słupka histogramu probabilistycznego (wartość funkcji dla argumentów należących do k-tej klasy) jest równa $\frac{n_k}{nd}$, gdzie

- n_k jest liczebnością k-tej klasy,
- d jest długością klasy,
- n jest liczbą obserwacji.

Funkcja h — „histogram probabilistyczny” (gęstość empiryczna) — zdefiniowana wzorem:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{n_k}{nd}, & \text{x należy do } k\text{-tej klasy,} \\ 0, & \text{x nie należy do żadnej z klas.} \end{cases}$$

Dziedziną funkcji h jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Wartość oczekiwana zmiennej losowej dyskretnej

Definicja 3. *Dla zmiennej losowej dyskretnej X wartość oczekiwana, jeśli istnieje, jest liczbą określoną wzorem*

$$EX = \sum_i x_i p_i,$$

w którym sumowanie obejmuje wszystkie wartości zmiennej X.

Uwaga Wartość oczekiwana nazywana jest literaturze także wartością średnią.
Wartość oczekiwana może być interpretowana jako "środek ciężkości" układu punktów materialnych $x_1, x_2, \ldots$ o wagach $p_1, p_2, \ldots$

Wariancja zmiennej losowej

Definicja 4. *Wariancję zmiennej losowej X określamy wzorem*

$$VarX = E(X-\mu)^2,$$

gdzie $\mu = EX$.

Wariancja jest równa wartości oczekiwanej kwadratu odchylenia wartości zmiennej losowej od swojej wartości przeciętnej.
Dla $a > 0$ mamy:

$$Var(aX+b) = a^2 Var(X).$$

Dla zmiennej dyskretnej X wariancja jest równa

$$VarX = \sum_i (x_i - \mu)^2 p_i.$$

Odcylenie standardowe DX: pierwiastek z wariancji.

Wartość oczekiwana i wariancja dla zmiennych losowych typu ciagłego
Wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej X typu ciągłego zdefiniowana jest wzorami:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xg(x)dx, \tag{1}$$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 g(x)dx. \tag{2}$$

Całkę w (1) można określić jako różnicę dwóch całek funkcji nieujemnych:

$$\int_0^{\infty} xg(x)dx - \int_{-\infty}^{0} |x|g(x)dx.$$

Wartość oczekiwana zmiennej losowej o rozkładzie $U(0,1)$
Niech $X \sim U(0,1)$. Funkcja gęstosści g jest równa 1 na $[0,1]$; poza tym przedziałem jest równa 0. Mamy:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xg(x)dx = \int_0^1 xdx = \Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}$$

oraz

$$\begin{aligned} Var(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2 g(x)dx = \\ &= \int_0^1 \Big(x-\frac{1}{2}\Big)^2 dx = \Big[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}\Big]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Wartość oczekiwana i wariancja zmiennej losowej o rozkładzie normalnym
Można pokazać, że wartość oczekiwana zmiennej losowej X o rozkładzie normalnym z parametrami μ i σ ma wartość oczekiwaną μ i odchylenie standardowe σ (w tym celu należy obliczyć odpowiednie całki niewłaściwe na prostej $(-\infty, \infty)$).
Naturalna ocena parametru μ dla danych $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\Big(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\Big) \quad \text{(„średnia z próby”);}$$

naturalna ocena parametru σ dla tych danych:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}\Big((x_1-\bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2\Big)},$$

„odchylenie standardowe z próby”.
Alternatywna ocena parametru σ dla tych danych:

$$s_* = \sqrt{\frac{1}{n-1}\Big((x_1-\bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2\Big)}.$$

Lektura uzupełniająca

str. 234–244 w:
T. Bednarski, Elementy matematyki w naukach ekonomicznych. Oficyna ekonomiczna, Kraków 2004.

str. 111–118 w:
[KM01] Koronacki, J., Mielniczuk, J. Statystyka dla studentów kierunków technicznych i przyrodniczych. WNT, Warszawa 2001.