

Funkcje: wielomianowa, wykładnicza, logarytmiczna — wykład 2

dr Mariusz Grządziel

semestr zimowy 2014/2015

Potęgowanie

Dla dowolnej liczby dodatniej a oraz liczby wymiernej $w = p/q$ definiujemy:

$$a^w \equiv (a^{1/q})^p.$$

Symbol „ $\equiv$ ” oznacza „równy z definicji”.

Powyższa definicja ma sens także dla a ujemnych, jeśli q jest nieparzyste.

Dla x niewymiernego możemy obliczyć zadaną dokładnością a^x znajdując wartości $a^{x_1}, a^{x_2}, \dots$, gdzie x_k oznacza przybliżenie dziesiętne liczby x wyrażone dokładnością do k miejsc po przecinku. Obliczanie kolejnych wartości a^{x_k} należy kontynuować do momentu, w którym błąd przybliżenia $|a^x - a^{x_k}|$ będzie mniejszy niż zadana liczba dodatnia.

Funkcja potęgowa

Funkcja, która przyporządkowuje argumentowi $x \in D$, gdzie D jest zbiorem liczb rzeczywistych lub jego odpowiednim podzbiorem, potęgę x^p , gdzie p jest liczbą rzeczywistą, nazywamy funkcją potęgową.

Zastosowania w naukach przyrodniczych Przy pewnych założeniach można pokazać, że stosunek powierzchni ciała zwierząt do ich masy jest proporcjonalny do odwrotności trzeciego pierwiastka z masy (czyli do $m^{-1/3}$, gdzie m oznacza masę zwierzęcia). Wynika stąd, że mniejsze zwierzęta muszą więcej wysiłku czasu wkładać w zdobywanie pożywienia niż zwierzęta o większej masie — por. [Wrz08, str. 71–72].

Funkcje wielomianowe

Funkcję

$$W(x) \equiv a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

nazywamy funkcją wielomianową.

- łatwo można obliczyć ich wartość;
- mogą opisać bogactwo kształtów badanych obiektów — w naukach przyrodniczych i ekonomicznych.

Funkcja wykładnicza

Dla a dodatniego i różnego od 1 definiujemy funkcję

$$f(x) \equiv a^x.$$

Dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Funkcja wykładnicza jest stosowana do modelowania procesów wzrostu populacji, rozpadu promieniotwórczego itd.

Funkcja logarytmiczna

Logarytmem o podstawie a , $0 < a \neq 1$ z liczby dodatniej x nazywamy liczbę rzeczywistą y , dla której

$$a^y = x.$$

Funkcja logarytmiczna, dla ustalonej podstawy $0 < a \neq 1$ przyporządkowuje argumentowi $x > 0$ logarytm $\log_a x$.

Własności funkcji— parzystość, nieparzystość

Definicja 1 (funkcji parzystej). *Funkcja $f : X \rightarrow Y$ jest parzysta, jeśli dla każdego $x \in X$*

$$-x \in X \quad \text{oraz} \quad f(-x) = f(x).$$

Interpretacja geometryczna: funkcja jest parzysta, gdy oś Oy jest osią symetrii jej wykresu.

Definicja 2 (funkcji nieparzystej). *Funkcja $f : X \rightarrow Y$ jest nieparzysta, jeśli dla każdego $x \in X$*

$$-x \in X \quad \text{oraz} \quad f(-x) = -f(x).$$

Interpretacja graficzna: funkcja jest nieparzysta, jeśli początek układu współrzędnych jest środkiem symetrii jej wykresu.

Przykłady Funkcje $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = \cos x + x^2$ są parzyste; funkcje $f_3(x) = \sin x$, $f_4(x) = 2x^3$ są nieparzyste.

Definicja 3 (funkcji okresowej). *Funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest okresowa, jeśli istnieje $T > 0$ takie, że dla każdego $x \in X$*

$$x \pm T \in X \quad \text{oraz} \quad f(x + T) = f(x).$$

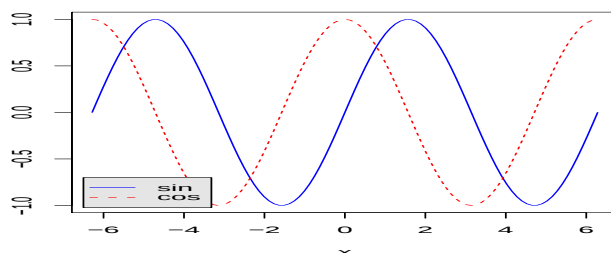
Liczbę T nazywamy okresem funkcji f . Jeżeli istnieje najmniejszy okres funkcji f , to nazywamy go okresem podstawowym.

Funkcje trygonometryczne

Funkcje trygonometryczne sinus i kosinus są funkcjami okresowymi. Ich okres podstawowy jest równy 2π

Definicja 4. *Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ będziemy nazywać:*

- *ograniczonym z dołu, jeśli istnieje dla niego ograniczenie dolne, tj. jeśli dla każdego istnieje $m \in \mathbb{R}$ takie, że dla każdego $x \in A$ mamy $m \leq x$.*



Rysunek 1: Wykresy funkcji sinus i kosinus

- ograniczonym z góry, jeśli istnieje dla niego ograniczenie górne, tj. jeśli istnieje $M \in \mathbb{R}$ takie, że dla każdego $x \in A$ mamy $M \geq x$.
- ograniczonym, jeśli jest ograniczony z góry i z dołu.

Definicja 5 (funkcji ograniczonej). Funkcja f jest na zbiorze (będącym podzbiorem jej dziedziny D_f):

- ograniczona z dołu, jeśli jej zbiór wartości jest ograniczony z dołu;
- ograniczona z góry, jeśli jej zbiór wartości jest ograniczony z góry;
- ograniczona, jeśli jest zarówno ograniczona z dołu jak i z góry.

Przykłady. (i) Funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ na zbiorze $(0, \infty)$ jest ograniczona z dołu, ale nie jest ograniczona z góry; (ii) funkcja $g(x) = x^2$ jest ograniczona na zbiorze $[1, 2]$.

Definicja 6 (funkcji rosnącej). Funkcja f jest rosnąca na zbiorze $A \subset D_f$, jeśli dla każdych $x_1, x_2 \in A$

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{jesli} \quad x_1 < x_2.$$

Definicja 7 (funkcji malejącej). Funkcja f jest malejąca na zbiorze $A \subset D_f$, jeśli dla każdych $x_1, x_2 \in A$

$$f(x_1) > f(x_2) \quad \text{jesli} \quad x_1 < x_2.$$

Definicja 8 (funkcji niemalejącej). Funkcja f jest niemalejąca na zbiorze $A \subset D_f$, jeśli dla każdych $x_1, x_2 \in A$

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad \text{jesli} \quad x_1 < x_2.$$

Definicja 9 (funkcji nierosnącej). Funkcja f jest nierosnąca na zbiorze $A \subset D_f$, jeśli dla każdych $x_1, x_2 \in A$

$$f(x_1) \geq f(x_2) \quad \text{jesli} \quad x_1 < x_2.$$

Definicja 10 (funkcji monotonicznej). Funkcja f jest monotoniczna na zbiorze $A \subset D_f$, jeśli jest nierosnąca lub niemalejąca na tym zbiorze; funkcję f nazywamy ściśle monotoniczną, jeśli jest malejąca lub rosnąca na tym zbiorze.

Złożenie funkcji

Definicja 11. Niech X, Y, Y_1, Z będą podzbiorami $\mathbb{R}$, $Y_1 \subset Y$ oraz niech $f: X \rightarrow Y$, $g: Y_1 \rightarrow Z$. Złożeniem funkcji g i f nazywamy funkcję $(g \circ f): X \rightarrow Z$ określoną wzorem:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Przykłady. (i) Dla $f(x) = 2x+1$ i $g(x) = 2x$ (dziedziny D_f i D_g są równe $\mathbb{R}$) złożenie $g \circ f$ będzie równe funkcji $h(x) = 4x+2$, $D_h = \mathbb{R}$. (ii) funkcja $h(x) = \sin(x^2)$ może być wyrażona jako złożenie funkcji $f(x) = x^2$ i $g(x) = \sin(x)$:

$$h(x) = (g \circ f)(x), \quad D_h = \mathbb{R};$$

Pojęcie funkcji odwrotnej

Złożenie $h(x) = g \circ f(x)$ funkcji $g(x) = \log_2 x$, gdzie dziedzina D_g jest równa zbiorowi liczb dodatnich i $f(x) = 2^x$, $D_f = \mathbb{R}$, jest równa funkcji identycznościowej:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = x, \quad D_h = \mathbb{R}.$$

Uwaga Funkcja $g(x) = \log_2 x$ jest funkcją odwrotną do funkcji $f(x) = 2^x$.

Definicja 12 (Funkcja odwrotna do funkcji ściśle monotonicznej). Niech zbiór $\mathcal{I}$ będzie odcinkiem, półprostą lub prostą. Niech f będzie funkcją ściśle monotoniczną na swojej dziedzinie $D_f = \mathcal{I}$. Oznaczmy zbiór wartości funkcji f przez Y . Funkcją odwrotną do f nazywamy funkcję h spełniającą warunki:

- dziedzina funkcji h jest równa Y ;
- zbiór wartości h jest równy $\mathcal{I}$;
- dla każdego $y \in Y$ jest spełniony warunek: $y = f(x) \Rightarrow x = h(y)$.

Funkcje elementarne

Definicja 13. Funkcjami elementarnymi nazywamy funkcje: (a) stała, potęgowa, wielomianowa, wykładnicza, logarytmiczna, trygonometryczne,...; (b) wszystkie funkcje które można otrzymać z funkcji wymienionych w punkcie (a) za pomocą skończonej liczby działań arytmetycznych oraz operacji złożenia.

Przykłady. Funkcjami elementarnymi są:

- funkcja $f(x) = x^{\cos x} + \frac{1+x}{1-x}$;
- funkcja $|\cdot|$ zdefiniowana przez

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x & x < 0; \end{cases}$$

zauważmy, że funkcja $|\cdot|$ może być przedstawiona jako złożenie $h = g \circ f$ funkcji $f(x) = x^2$ oraz $g(x) = \sqrt{x}$.