

Ciągi liczbowe — wykład 3

dr Mariusz Grządział

semestr zimowy, r. akad. 2014/2015

Definicja 1 (ciągu liczbowego). *Ciągiem liczbowym nazywamy funkcję odwzorowującą zbiór liczb naturalnych w zbiór liczb rzeczywistych. Wartość tej funkcji dla liczby naturalnej n nazywamy n -tym wyrazem ciągu i oznaczamy przez a_n , b_n itp. Ciągi o takich wyrazach oznaczamy odpowiednio przez (a_n) , (b_n) itp. Zbiór wyrazów ciągu (a_n) oznaczamy przez $\{a_n\}$.*

Uwaga 1 Niektórzy autorzy definiujemy ciąg jako funkcję określoną na dowolnym podziorze liczb naturalnych.

Uwaga 2 W książce D. Wrzosa ciąg o wyrazach $a_n, n \in \mathbb{N}$ oznaczany jest przez $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Sposoby określania ciągu

Ciągi liczbowe możemy określać:

(i) wzorem: np.

$$a_n = 3^n.$$

(ii) opisowo

a_n — n -ta cyfra po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby π ;

(iii) rekurencyjnie: wyraz $(n+1)$ -szy jest określony jako funkcja początkowych n wyrazu ciągu; np. ciąg arytmetyczny (a_n) , którego pierwszy wyraz jest równy 1 i różnica r jest równa 2, może być określony rekurencyjnie w następujący sposób:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 2$$

— por. [Wrz08, str. 109].

Ciąg geometryczny

Definicja 2. Ciąg (a_n) określony przez

$$a_1 = a, a_{n+1} = qa_n,$$

gdzie a i q są danymi liczbami rzeczywistymi, nazywamy ciągiem geometrycznym o pierwszym wyrazie a i ilorazie q .

Przykład 1. W chwili $t = 1$ liczebność populacji bakterii wynosi 1000. Po upływie czasu T liczebność populacji bakterii się podwaja. Przyjmując T za jednostkę pomiaru czasu liczebność populacji a_n w chwili $t = n$ można określić wzorem:

$$a_1 = 1000; \quad a_{n+1} = 2a_n.$$

Definicja 3. Ciąg (a_n) jest ograniczony z dołu, jeżeli zbiór $\{a_n\}$ jest ograniczony z dołu, tj. istnieje $m \in \mathbb{R}$ takie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \geq m.$$

Definicja 4 (ciągu ograniczonego z góry). Ciąg (a_n) jest ograniczony z góry, jeżeli zbiór $\{a_n\}$ jest ograniczony z góry, tj. istnieje $M \in \mathbb{R}$ takie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \leq M.$$

Przykład

Ciąg $b_n = \frac{n}{n+3}$ jest ograniczony z góry- ograniczeniem górnym jest np. 1.

Definicja 5 (ciągu ograniczonego). Ciąg (a_n) jest ograniczony, jeżeli zbiór $\{a_n\}$ jest ograniczony, tj. ma zarówno ograniczenie dolne jak i górne.

Przykład

Ciąg

$$a_n = \frac{n}{n^2 + 1}$$

jest ograniczony. Ograniczeniem dolnym jest np. 0 a ograniczeniem górnym np. 1.

Definicja 6. Ciąg (a_n) jest rosnący, jeżeli

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots, \text{ tzn. dla każdego } n \in \mathbb{N} \quad a_n < a_{n+1}.$$

Analogicznie definiujemy ciąg niemalejący:

Definicja 7. Ciąg (a_n) jest niemalejący, jeżeli

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots, \text{ tzn. dla każdego } n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq a_{n+1}.$$

Uwaga. Analogicznie definiuje się ciąg malejący i nierosnący.

Ciąg nazywamy monotonicznym, jeżeli jest nierosnący lub niemalejący.

Pojęcie granicy ciągu

Rozważmy ciąg (a_n) określony przez $a_n = \frac{1}{n}$. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ wszystkie, z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby, wyrazy tego ciągu należą do epsilonowego otoczenia zera $(0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon)$.

Zamiast wszystkie z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby będziemy często pisać prawie wszystkie.

Definicja 8 (słowne określenie granicy właściwej ciągu). Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy właściwej $a \in \mathbb{R}$, jeśli w dowolnym otoczeniu epsilonowym a znajdują się prawie wszystkie wyrazy tego ciągu.

Pojęcie granicy ciągu — c.d.

Definicja 9 (granicy właściwej ciągu). Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy właściwej $a \in \mathbb{R}$, co zapisujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego n naturalnego większego niż n_0

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Równość

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

często jest zapisywana krócej: $\lim a_n = a$ lub $a_n \rightarrow a$.

Granica ciągu — przykład

Zadanie. Korzystając z definicji granicy uzasadnij, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Rozw. Mamy pokazać, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n > n_0$

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Musimy znaleźć liczbę $n_0 \in \mathbb{N}$ taką, że dla każdego $n > n_0$ będzie spełniona nierówność $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$. Mamy

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Zatem za n_0 można przyjąć dowolną liczbę naturalną większą niż $\frac{1}{\varepsilon}$.

Granica — zastosowania geometryczne

Problem. Chcemy obliczyć pole s figury S ograniczonej prostą $y = 0$, prostą $x = 1$ i wykresem funkcji $f(x) = x^2$.

Rozwiązanie przybliżone. Dzielimy odcinek $[0, 1]$ na n odcinków o równej długości:

$$\left[0, \frac{1}{n}\right), \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \dots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right].$$

Suma pól prostokątów, których podstawy są równe tym odcinkom a wysokości kwadratami ich lewych końców, oznaczana przez s_n , jest sensownym przybliżeniem pola figury S .

Pole figury S można zdefiniować jako $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$.

„Przykład geometryczny” — c.d.

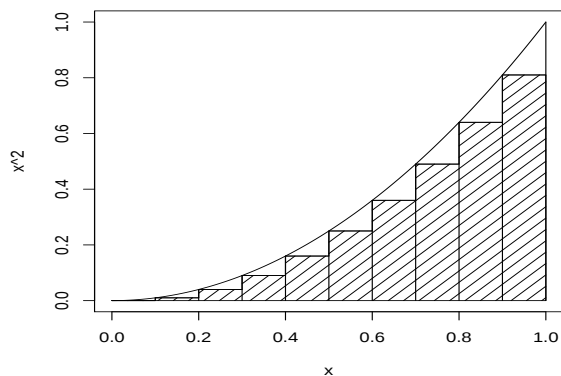
Mamy

$$s_n = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{n} \times \left(\frac{k-1}{n} \right)^2 \right] = \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6};$$

wykorzystaliśmy równość:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Obliczenie granicy ciągu (s_n) bezpośrednio z definicji — raczej trudne.



Rysunek 1: Przybliżony sposób obliczania pola figury S

Twierdzenie 1 (o arytmetyce granic ciągów). *Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy właściwej a oraz ciąg (b_n) jest zbieżny do granicy właściwej b , to*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b, \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b, \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = ca, \text{ gdzie } c \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab, \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = a/b, \text{ o ile } b \neq 0, \quad (5)$$

„Przykład geometryczny”— c.d.

Korzystając z twierdzenia o arytmetyce granic ciągów możemy obliczyć granicę ciągu (s_n) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \quad (6)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \quad (7)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2} = \quad (8)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{6n^2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{6n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6n^2} = \quad (9)$$

$$= \frac{1}{3} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6n^2} = \frac{1}{3}. \quad (10)$$

Przy obliczeniach zostało wykorzystane Twierdzenie o arytmetyce granic ciągów.

Liczba e

Rozważmy ciąg

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Można sprawdzić, że:

$$e_1 = 2; \quad e_2 = 2,25; \quad e_{10} = 2,594; \quad e_{100} = 2,705.$$

Fakt. Można pokazać, że ciąg (e_n) jest rosnący.

Fakt. Dla każdego n zachodzi $e_n \leq 3$.

Z powyższych faktów, oraz z twierdzenia, które mówi, że ciąg rosnący i ograniczony z góry jest zbieżny (por. G. Fichtenholz, rachunek różniczkowy i całkowy, t.1, rozdz. 34), wynika, że

Twierdzenie 2. Ciąg

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

jest zbieżny.

Granice tego ciągu będziemy oznaczać przez e (od matematyka szwajcarskiego L. Eulera (1707-1783)):

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Liczba e z dokładnością do 10 cyfr po przecinku jest równa

$$2,7182818285.$$