

Pochodna funkcji: definicja, podstawowe własności — wykład 5

dr Mariusz Grządział

Rok akademicki 2014/15, semestr zimowy

Problem — obliczanie prędkości chwilowej

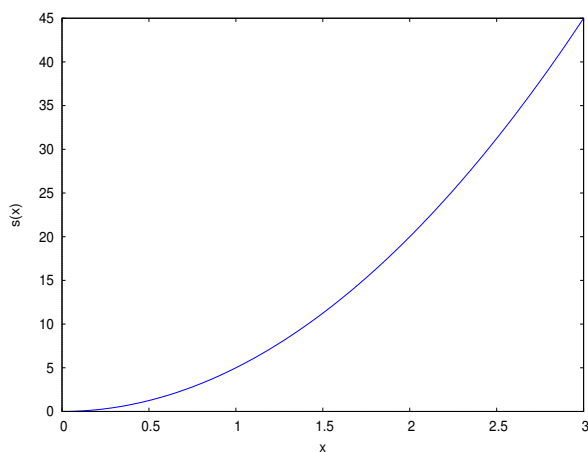
Droga s , jaką przemierzy kulka ołowiana upuszczona z wysokiej wieży po czasie t :

$$s = \frac{gt^2}{2},$$

gdzie $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$.

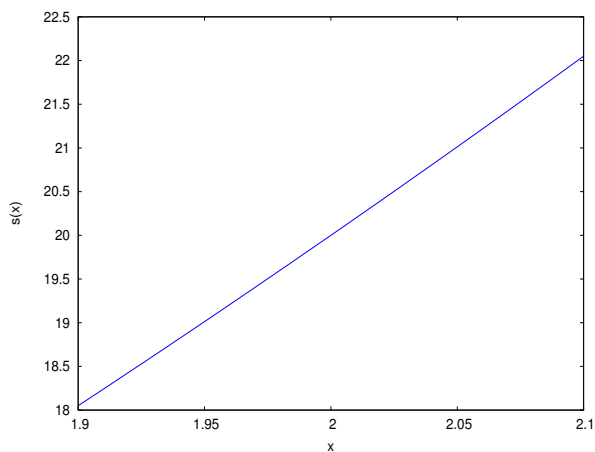
Chcemy znaleźć prędkość kulki w danym momencie, np. dla $t = 2$.

Ruch kulki ołowianej — wykresy



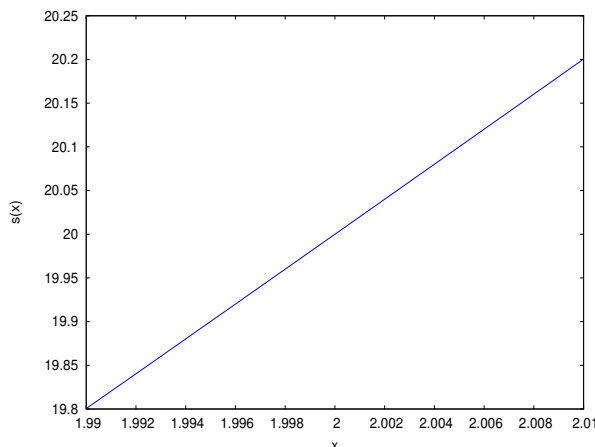
Rysunek 1: Wykres funkcji s na przedziale $[0, 3]$

Ruch kulki ołowianej — wykresy (c.d.)



Rysunek 2: Wykres funkcji s na przedziale $[1,9; 2,1]$

Ruch kulki ołowianej — wykresy (c.d.)



Rysunek 3: Wykres funkcji s na przedziale $[1,99; 2,01]$

Prędkość jako granica funkcji

Rozważmy punkt materialny poruszający się wzdłuż osi OX ; położenie punktu w chwili t będziemy oznaczali przez $S(t)$. Prędkość chwilową tego punktu materialnego w chwili t_0 można zdefiniować jako:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0},$$

jeśli ta granica istnieje.

Pojęcie granicy funkcji w punkcie

Dla dowolnego ciągu (d_n) takiego, że:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n \rightarrow 0, \quad d_n \neq 0 \text{ dla } n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

ciąg $v(d_n)$ (prędkości średnich na odcinku $[t, t + d_n]$)

$$v(d_n) = \frac{s(t + d_n) - s(t)}{d_n} = \frac{0,5(gt^2 + 2gtd_n + gd_n^2 - gt^2)}{d_n} = gt + g \frac{d_n}{2}$$

jest zbieżny do granicy właściwej gt .

Innymi słowy, gt jest wspólną granicą wszystkich ciągów $v(d_n)$ takich, że (d_n) spełnia warunki (1).

W szczególności: dla $t = 2$ prędkość chwilowa jest równa $10 \cdot 2 = 20$ (jednostka: $\frac{m}{s}$).

Iloraz różnicowy

Definicja 1. Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0, r)$, gdzie $r > 0$. Ilorazem różnicowym funkcji f w punkcie x_0 odpowiadającym przyrostowi Δx , gdzie $0 < |\Delta x| < r$, zmiennej niezależnej nazywamy liczbę

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Pochodna funkcji

Definicja 2. Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0)$. Pochodną właściwą funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę właściwą

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Uwaga. Inaczej mówiąc pochodna funkcji f jest granicą ilorazu różnicowego $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ gdy $\Delta x \rightarrow 0$. Mamy zatem

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Oznaczenia

Do oznaczania pochodnej funkcji f w punkcie x_0 stosowane są także symbole

$$\frac{df}{dx}(x_0), Df(x_0).$$

Obliczanie prędkości chwilowej — c.d.

Prędkość ołowianej kulki upuszczonej z wysokiej wieży w chwili t_0 jest równa $s'(t_0)$.

Przypominamy: $s(t) = \frac{gt^2}{2}$.

Mamy:

$$s'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{g}{2}(t + t_0) = gt_0.$$

Obliczanie pochodnej — przykłady

Pochodna w punkcie x_0 funkcji liniowej f określonej wzorem $f(x) = ax + b$ jest równa a :

$$f'(x_0) = a, \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

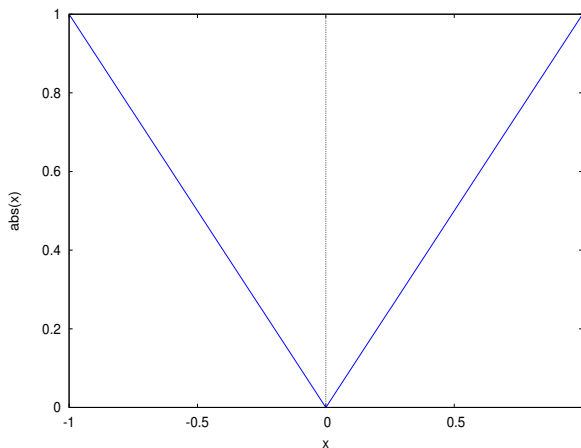
Pochodna w punkcie x_0 funkcji g określonej wzorem $g(x) = ax^2 + bx + c$ jest równa $2ax_0 + b$:

$$g'(x_0) = 2ax_0 + b, \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

Pochodna funkcji na przedziale

Definicja 3 (pochodnej funkcji na przedziale otwartym). *Funkcja ma pochodną na przedziale otwartym wtedy i tylko wtedy, gdy ma pochodną w każdym punkcie tego zbioru. Funkcję określoną na zbiorze, której wartości w punktach x tego zbioru są równe $f'(x)$ nazywamy pochodną funkcji na zbiorze i oznaczamy przez f' .*

Funkcja $y = |x|$ — wykresy



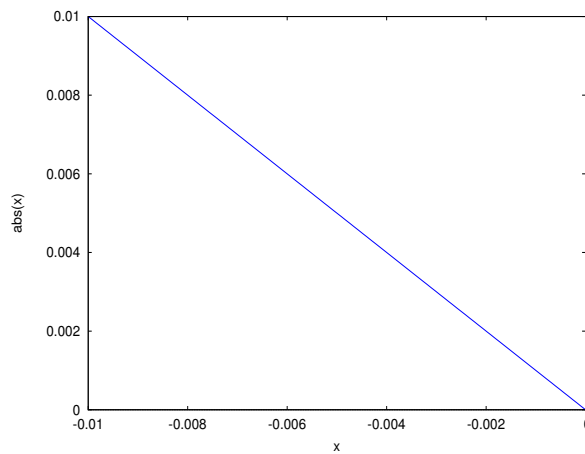
Rysunek 4: Wykres funkcji $y = |x|$ na przedziale $[-1; 1]$

Funkcja $y = |x|$ — wykresy (c.d.)

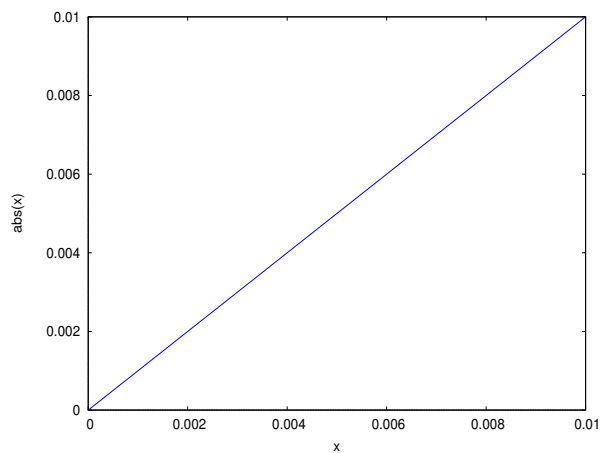
Funkcja $y = |x|$ — wykresy (c.d.)

Różniczkowalność funkcji $y = |x|$

Funkcja $y = |x|$ nie ma pochodnej w $x = 0$. Intuicyjne uzasadnienie — rysunki. Można też podać ścisły dowód tego faktu. „Tempo wzrostu” tej funkcji jest równe -1 na lewo od 0 i 1 na prawo od zera. Jak to sformalizować?



Rysunek 5: Wykres funkcji $y = |x|$ na przedziale $[-0,01; 0]$



Rysunek 6: Wykres funkcji $y = |x|$ na przedziale $[0; 0,01]$

Pochodne jednostronne

Jeśli w definicji pochodnej zamienimy „granicy funkcji w punkcie” na „granicę lewostronną” funkcji w punkcie, otrzymamy definicję pochodnej lewostronnej funkcji (w danym punkcie). Analogicznie możemy zdefiniować pochodną prawostronną w punkcie.

Oznaczenia Pochodną lewostronną funkcji f w punkcie x_0 będziemy oznaczać $f'_-(x_0)$, pochodną prawostronną funkcji f w punkcie x_0 będziemy oznaczać $f'_+(x_0)$.

Przykład 1. Dla funkcji $f(x) = |x|$ mamy: $f'_-(0) = -1$ i $f'_+(0) = 1$.

Pojęcie przedziału w analizie matematycznej

Przez przedział będziemy rozumieć podzbiór prostej będący

- odcinkiem — postaci $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ lub (a, b) ;
- półprostą — postaci $[a, \infty)$, (a, ∞) , $(-\infty, b]$ lub $(-\infty, b)$;
- prostą $\mathbb{R}$.

Uwaga. Przedziałami otwartymi będziemy nazywać zbiory postaci (a, b) , $(-\infty, a)$, (a, ∞) , $(-\infty, \infty)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Pochodna na przedziale nie będącym zbiorem otwartym

Pochodną funkcji f na przedziale $\mathcal{I} = [a, b]$ (oznaczymy ją przez f') określamy następująco:

$$f'(x) = \begin{cases} f'(x), & x \in (a, b), \\ \text{pochodna prawostronna w } x, & x = a, \\ \text{pochodna lewostronna w } x, & x = b. \end{cases}$$

Analogicznie definiujemy pochodną na innych typach przedziałów, nie będących zbiorami domkniętymi.

Pochodną lewostronną funkcji f w x_0 definiujemy korzystając z pojęcia granicy lewostronnej w x_0 (zamiast pojęcia granicy funkcji w x_0). Analogicznie definiujemy pochodną prawostronną funkcji.

Przykład 2. Pochodna funkcji $f(x) = |x|$ na $\mathcal{I} = [0, \infty)$ jest równa funkcji tożsamościowo równej 1.

Ciągłość i różniczkowalność

Definicja 4. Funkcję f będziemy nazywać różniczkowalną w punkcie $x_0 \in D_f$, jeżeli ma tam pochodną.

Definicja 5. Funkcję f będziemy nazywać różniczkowalną na przedziale otwartym $\mathcal{I}$, jeżeli jest ona różniczkowalna w każdym punkcie tego przedziału.

Z ciągłości funkcji w punkcie x_0 nie musi wynikać jej różniczkowalność w tym punkcie. Np. funkcja $y = |x|$ jest ciągła w punkcie x_0 , lecz nie jest w tym punkcie różniczkowalna.

Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0). \quad (2)$$

Jeżeli pochodne: lewostronna i prawostronna są równe, to ich wspólna wartość jest pochodną funkcji f w punkcie x_0 .

Przykład 3. Funkcja f_1 określona wzorem

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1, \\ 2x - 1, & x \geq 1, \end{cases}$$

jest różniczkowalna w $x_0 = 1$ (a także na $\mathbb{R}$).

Przykład 4. Funkcja f_2 określona wzorem

$$f_2(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1, \\ x, & x \geq 1, \end{cases}$$

jest ciągłą w $x_0 = 1$, lecz nie jest w tym punkcie różniczkowalna.