

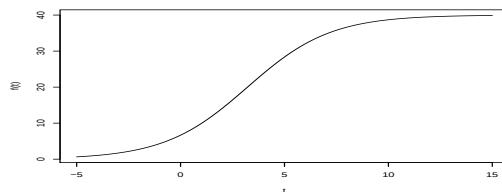
Wykład 7: Pochodna funkcji — zastosowania do badania przebiegu zmienności funkcji

dr Mariusz Grządział

semestr zimowy, rok akademicki 2014/2015

Funkcja logistyczna

Rozważamy funkcję logistyczną $y = f_0(t) = \frac{40}{1+5e^{-0,5t}}$

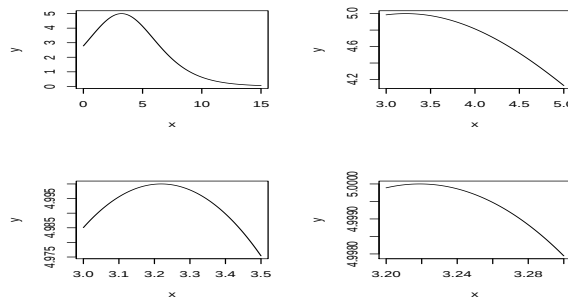


Rysunek 1: Wykres funkcji $y = f_0(t) = \frac{40}{1+5e^{-0,5t}}$

Chcemy znaleźć punkt, w którym tempo wzrostu funkcji f „przestaje rosnąć”.

Funkcja logistyczna—c.d.

Analizując wykres pochodnej $y = f'_0(t)$ dochodzimy do wniosku, że szukany punkt jest równy w przybliżeniu 3,22.



Rysunek 2: Pochodna funkcji $y = f_0(t) = \frac{40}{1+5e^{-0,5t}}$

Badanie przebiegu funkcji

Jest jasne, że chcąc znaleźć szukany punkt należy zbadać przebieg zmienności funkcji f'_0 .

Zacznijmy od przypomnienia definicji pojęć związanych z badaniem przebiegu funkcji takich jak: minimum lokalne, maksimum lokalne czy druga pochodna.

Pochodne wyższych rzędów

Definicja 1. Mówimy, że funkcja f jest:

- różniczkowalna w punkcie x_0 , jeżeli ma ona w tym punkcie pochodną;
- różniczkowalna na przedziale $\mathcal{I}$, jeżeli ma pochodną w każdym punkcie tego przedziału.

Założmy, że funkcja f jest różniczkowalna na przedziale otwartym $\mathcal{I}$.

W przypadku przedziałów, które nie są przedziałami otwartymi: należy skorzystać z pojęcia pochodnej lewostronnej lub prawostronnej.

Pochodną funkcji f' na $\mathcal{I}$ (jeżeli ona istnieje) będziemy oznaczać przez $f^{(2)}$, (lub f'') pochodną funkcji $f^{(2)}$ na $\mathcal{I}$ (jeżeli ona istnieje) przez $f^{(3)}$ (lub f''') itd.

Funkcje dwukrotnie różniczkowalne

Definicja 2. Mówimy, że funkcja f jest:

- dwukrotnie różniczkowalna w punkcie x_0 , jeżeli ma ona w tym punkcie drugą pochodną;
- dwukrotnie różniczkowalna na przedziale otwartym $\mathcal{I}$, jeżeli ma drugą pochodną w każdym punkcie tego przedziału (w przypadku przedziału, który nie jest przedziałem otwartym: należy skorzystać z pojęć: pochodna prawostronna lub pochodna lewostronna, aby podać odpowiednią definicję)

Pochodne wyższych rzędów— przykłady

Dla $f(x) = x^3$ (w tym przypadku obliczamy pochodne na przedziale $\mathcal{I} = \mathbb{R}$) mamy:

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2, \\f''(x) &= 6x, \\f'''(x) &= 6, \\f^{(n)}(x) &= 0 \text{ dla } n > 3.\end{aligned}$$

Pochodne wyższych rzędów— przykłady

Dla $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ (w tym przypadku obliczamy pochodne na przedziale $\mathcal{I} = (0, \infty)$) mamy:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \\f''(x) &= \frac{1}{2} \cdot (-1/2)x^{-3/2} = -\frac{1}{4} \frac{1}{x\sqrt{x}}, \\&\text{itd.}\end{aligned}$$

Monotoniczność funkcji na przedziale

Założmy, że funkcja f jest różniczkowalna na przedziale $\mathcal{I}$ (tzn. istnieje pochodna funkcji f na przedziale $\mathcal{I}$). Funkcja f jest:

- rosnąca, jeśli $f'(x) > 0$ dla $x \in \mathcal{I}$;
- niemalejąca, jeśli $f'(x) \geq 0$ dla $x \in \mathcal{I}$;
- malejąca, jeśli $f'(x) < 0$ dla $x \in \mathcal{I}$;
- nierosnąca, jeśli $f'(x) \leq 0$ dla $x \in \mathcal{I}$.

Monotoniczność funkcji logistycznej

Pochodna funkcji logistycznej

$$f(t) = \frac{a}{1 + be^{-ct}}, \quad a, b, c > 0,$$

ma postać

$$f'(t) = \frac{abce^{-ct}}{(1 + be^{-ct})^2}.$$

Stąd wynika, że f jest monotoniczna na $\mathbb{R}$.

Monotoniczność f można też uzasadnić, opierając się na własnościach funkcji wykładniczej—wynika z nich, że mianownik f jest funkcją malejącą zmiennej x .

Funkcja logistyczna— c.d.

Druga pochodna f ma postać:

$$f''(t) = \frac{abc^2e^{-ct}(be^{-ct} - 1)}{(1 + be^{-ct})^3}.$$

Mamy

$$f''(t) = 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } (be^{-ct} - 1) = 0.$$

A więc druga pochodna znika dla $t_0 = \frac{\ln b}{c}$.

Dla funkcji f_0 mamy:

$$\frac{\ln b}{c} = \frac{\ln 5}{0,5} \approx 3,218876.$$

Intuicje geometryczne: znaleźliśmy szukany punkt.

Problem: jak uzasadnić to bardziej formalnie?

Ekstremum lokalne

Definicja 3. Mówimy, że funkcja $f(x)$ osiąga w punkcie x_0

- *minimum lokalne*, jeżeli wartość funkcji f w punkcie x_0 jest mniejsza od wartości funkcji f w pewnym sąsiedztwie tego punktu, tj.

$$f(x) > f(x_0) \quad \text{dla } x \in S(x_0, r)$$

dla pewnego $r > 0$.

- maksimum lokalne, jeżeli wartość funkcji f w punkcie x_0 jest większa od wartości funkcji f w pewnym sąsiedztwie tego punktu, tj.

$$f(x) < f(x_0) \quad \text{dla } x \in S(x_0, r)$$

dla pewnego $r > 0$.

ekstremum lokalne: minimum lokalne lub maksimum lokalne.

Ekstremum lokalne— warunek wystarczający

Twierdzenie 1. Jeśli pochodna funkcji f w punkcie x_0 jest równa zero i dla pewnego $r > 0$

- spełnione są nierówności

$$f'(x) < 0 \quad \text{dla } x \in (x_0 - r, x_0), \quad (1)$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{dla } x \in (x_0, x_0 + r), \quad (2)$$

to funkcja w x_0 osiąga minimum lokalne.

- spełnione są nierówności

$$f'(x) > 0 \quad \text{dla } x \in (x_0 - r, x_0), \quad (3)$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{dla } x \in (x_0, x_0 + r), \quad (4)$$

to funkcja w x_0 osiąga maksimum lokalne.

Funkcja logistyczna—c.d.

Ekstremum lokalne— przykład

Chcąc uzasadnić, że dla a, b i c dodatnich pochodna funkcji $f(t) = \frac{a}{1+be^{-ct}}$, postaci

$$f'(t) = \frac{abce^{-ct}}{(1+be^{-ct})^2},$$

ma maksimum w punkcie $t_0 = \frac{\ln b}{c}$, należy skorzystać z Twierdzenia 1 i następujących faktów:

$$f''(t) > 0 \quad \text{dla } t < t_0;$$

$$f''(t) < 0 \quad \text{dla } t > t_0;$$

$$f''(t) = 0 \quad \text{dla } t = t_0.$$

Ekstremum lokalne— przykład

Rozważmy funkcję

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x.$$

Oczywiście g jest różniczkowalna na $\mathbb{R}$. Chcąc zbadać istnienie ekstremów funkcji g znajdujemy miejsca zerowe $g'(x)$:

$$g'(x) = x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ lub } x = 3.$$

Mamy:

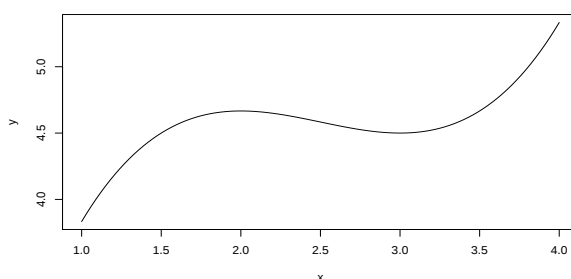
$$g'(x) > 0 \text{ dla } x < 2 \text{ lub } x > 3; \quad (5)$$

$$g'(x) < 0 \text{ dla } 2 < x < 3. \quad (6)$$

$$(7)$$

Stąd funkcja g ma w punkcie $x = 2$ maksimum lokalne, i w punkcie $x = 3$ minimum lokalne.

Przykład—c.d.



Rysunek 3: Wykres $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x$

Pojęcie funkcji wypukłej

Tempo wzrostu funkcji $f_0(t) = \frac{40}{1+5e^{-0.5t}}$ rośnie na $[0, t_0)$, gdzie $t_0 = \frac{\ln 5}{0.5} \approx 3.22$.

Odpowiada to ścisłej wypukłości funkcji f_0 na przedziale $[0, t_0)$.

Definicja 4. Mówimy, że funkcja f jest ściśle wypukła na przedziale $\mathcal{I}$, jeżeli dla $x_1, x_2 \in \mathcal{I}$, $x_1 < x_2$, odcinek łączący punkty $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ leży w całości (z wyjątkiem końców) ponad wykresem funkcji f .

Wypukłość funkcji dwukrotnie różniczkowalnych

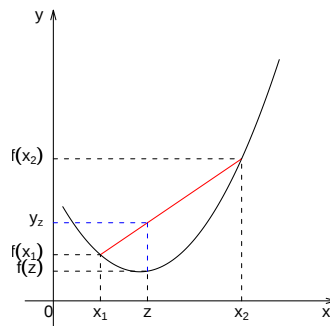
Funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna na przedziale otwartym $\mathcal{I}$ jeżeli dla każdego $x_0 \in \mathcal{I}$ istnieje druga pochodna funkcji f w x_0 .

Twierdzenie 2. Funkcja f dwukrotnie różniczkowalna na $\mathcal{I}$ jest ściśle wypukła na $\mathcal{I}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f''(x_0) > 0$ dla każdego $x_0 \in \mathcal{I}$.

Dla funkcji logistycznej $f(t) = \frac{a}{1+be^{-ct}}$, $a, b, c > 0$, druga pochodna

$$f''(t) = \frac{abc^2 e^{-ct} (be^{-ct} - 1)}{(1 + be^{-ct})^3}$$

jest dodatnia dla $t < t_0 = \frac{\ln b}{c}$; gdy $b = 5, c = 0.5$ (odpowiadają funkcji f_0) $t_0 \approx 3.22$.



Rysunek 4: Funkcja f jest wypukła na przedziale otwartym $\mathcal{I}$ jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in \mathcal{I}$ dla każdego $z \in (x_1, x_2)$ punkt $(z, f(z))$ leży poniżej odcinka łączącego $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$.

Pojęcie funkcji ściśle wklęsłej

Tempo wzrostu funkcji $f_0(t) = \frac{40}{1+5e^{-0,5t}}$ rośnie na (t_0, ∞) , gdzie $t_0 = \frac{\ln 5}{0,5} \approx 3,22$. Odpowiada to ściślej wklęsłości funkcji f_0 na przedziale (t_0, ∞) .

Definicja 5. Mówimy, że funkcja f jest ściśle wklęsła na przedziale $\mathcal{I}$, jeżeli dla $x_1, x_2 \in \mathcal{I}$, $x_1 < x_2$, odcinek łączący punkty $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ leży w całości (z wyjątkiem końców) pod wykresem funkcji f .

Ściśła wklęsłość funkcji dwukrotnie różniczkowalnych

Twierdzenie 3. Funkcja f dwukrotnie różniczkowalna na $\mathcal{I}$ jest ściśle wypukła na $\mathcal{I}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f''(x_0) < 0$ dla każdego $x_0 \in \mathcal{I}$.

Dla funkcji logistycznej $f(t) = \frac{a}{1+be^{-ct}}$, $a, b, c > 0$, druga pochodna

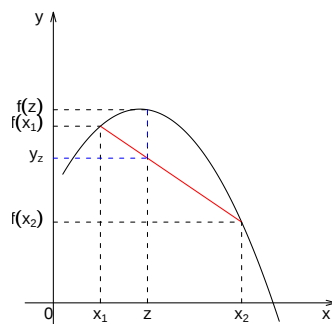
$$f''(t) = \frac{abc^2 e^{-ct} (be^{-ct} - 1)}{(1 + be^{-ct})^3}$$

jest ujemna dla $t > t_0 = \frac{\ln b}{c}$; gdy $b = 5, c = 0,5$ (odpowiadają funkcji f_0) $t_0 \approx 3,22$.

Punkt przegięcia

Definicja 6. Niech funkcja f będzie różniczkowalna na otoczeniu punktu $O(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r)$ dla pewnego $r > 0$. Mówimy, że punkt $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia wykresu f jeśli funkcja f jest:

- ściśle wypukła na $(x_0 - r, x_0)$ i ściśle wklęsła na $(x_0, x_0 + r)$



Rysunek 5: Funkcja f jest ściśle wklęsła na przedziale otwartym $\mathcal{I}$ jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in \mathcal{I}$ dla każdego $z \in (x_1, x_2)$ punkt $(z, f(z))$ leży powyżej odcinka łączącego $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$.

- lub ściśle wklęsła na $(x_0 - r, x_0)$ i ściśle wypukła na $(x_0, x_0 + r)$.

Dla funkcji logistycznej $f(t) = \frac{a}{1+be^{-ct}}$, $a, b, c > 0$, punkt $(t_0, f(t_0))$ jest punktem przegięcia wykresu $t_0 = \frac{\ln b}{c}$ (zakładając, że t_0 należy do dziedziny f w pewnych zastosowaniach przyjmujemy, że $D_f = [0, \infty)$).

Uzupełnienia

Uwaga 1. Definicję wypukłości funkcji otrzymujemy zastępując w definicji ściślej wypukłości słowa „ponad wykresem” przez słowa „ponad wykresem lub ma punkty z nim wspólne”. Podobnie otrzymujemy definicję wklęsłości funkcji modyfikując definicję ściślej wklęsłości (por. [Wrz08, str. 147]).

Uwaga 2. Załóżmy, że $x_0 \in (a, b)$. Warunkiem koniecznym na to, aby funkcja f , dwukrotnie różniczkowalna na przedziale (a, b) , miała w punkcie $(x_0, f(x_0))$ punkt przegięcia jest $f''(x_0) = 0$.