

# Wykład 8: Całka nieoznaczona

dr Mariusz Grządziel

semestr zimowy, rok akademicki 2014/2015

## Motywacja

**Problem 1.** Kropla wody o średnicy 0,07 mm porusza się z prędkością

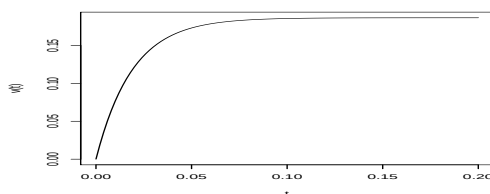
$$v(t) = \frac{g}{c}(1 - e^{-ct}),$$

gdzie  $g$  oznacza przyspieszenie ziemskie, a stała  $c = 52,6 \frac{1}{s}$  została wyznaczona eksperymentalnie.

W chwili  $t = 0$  prędkość jest równa 0.

Chcemy znaleźć drogę  $s(t)$ , jaką przebyło ciało po upływie czasu  $t$ .

## Prędkość małej kropli



Rysunek 1: Prędkość kropli o średnicy 0,07 mm w zależności od czasu

## Funkcja pierwotna

Problem sprowadza się do znalezienia funkcji  $s(t)$  takiej, że

$$s'(t) = v(t), t \in (0, \infty). \quad (1)$$

**Definicja 1** (funkcji pierwotnej). Funkcja  $F$  jest funkcją pierwotną funkcji  $f$  na przedziale otwartym  $I$ , jeśli

$$F'(x) = f(x) \text{ dla każdego } x \in I.$$

**Uwaga** Jeżeli funkcja  $f$  jest określona na przedziale domkniętym  $[a, b]$ , to  $F$  nazywamy funkcją pierwotną funkcji  $f$ , jeżeli

$$F'(x) = f(x) \text{ dla } x \in (a, b), \quad F'_+(a) = f(a), \quad F'_-(b) = f(b).$$

## Funkcja pierwotna — przykłady

**Przykład 1.** Funkcjami pierwotnymi  $f(x) = x^3$  na przedziale  $I = \mathbb{R}$  są na przykład:

- $F_1(x) = \frac{x^4}{4} + 2$ ;
- $F_2(x) = \frac{x^4}{4} - 3$ .

**Twierdzenie 1.** Niech  $F$  będzie funkcją pierwotną funkcji  $f$  na przedziale  $I$ . Wtedy

- (i)  $G(x) = F(x) + C$ , gdzie  $C \in \mathbb{R}$ , jest funkcją pierwotną funkcji  $f$  na  $I$ ,
- (ii) każdą funkcję pierwotną funkcji  $f$  na  $I$  można przedstawić w postaci  $F(x) + D$ , gdzie  $D \in \mathbb{R}$ .

**Uwaga.** Powyższe twierdzenie mówi o postaci funkcji pierwotnych dla ustalonej funkcji. Funkcje pierwotne mają postać  $F(x) + C$

**Twierdzenie 2.** Jeżeli funkcja jest ciągła na przedziale, to ma funkcję pierwotną na tym przedziale.

**Uwaga.** Funkcja pierwotna funkcji elementarnej nie musi być funkcją elementarną, np. pierwotna funkcji:

$$f(x) = e^{-x^2}$$

nie jest funkcją elementarną.

**Uwaga** Pojęcie funkcji elementarnej zostało określone podczas wykładu 2-go (por. Definicja 15)

## Całki nieoznaczone

**Definicja 2** (całki nieoznaczonej). Niech  $F$  będzie funkcją pierwotną funkcji  $f$  na przedziale  $I$ . Całką nieoznaczoną funkcji  $f$  na przedziale  $I$  oznaczamy zbiór funkcji

$$\{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}.$$

Całkę nieoznaczoną funkcji  $f$  oznaczamy przez  $\int f(x)dx$ .

## Całka oznaczona — notacja

**Uwaga.** W dalszej części wykładu będziemy opuszczali nawiasy klamrowe w definicji całki nieoznaczonej, a więc np. zamiast pisać

$$\int x dx = \left\{ \frac{x^2}{2} + C, C \in \mathbb{R} \right\}$$

będziemy pisać:

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C.$$

## Całki nieoznaczone ważniejszych funkcji elementarnych

| Wzór                                                   | Zakres zmienności                                     |
|--------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| $\int 0 dx = C$                                        | $x \in \mathbb{R}$                                    |
| $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$                | $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ oraz $x \in \mathbb{R}$ |
| $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$                | $p = -2, -3, \dots; x < 0$ lub $x > 0$                |
| $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ | $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$          |
| $\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C$                     | $x \in (-\infty, 0)$ lub $x \in (0, \infty)$          |
| $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$                  | $0 < a \neq 1$ oraz $x \in \mathbb{R}$                |
| $\int e^x dx = e^x + C$                                | $x \in \mathbb{R}$                                    |
| $\int \sin x dx = -\cos x + C$                         | $x \in \mathbb{R}$                                    |
| $\int \cos x dx = \sin x + C$                          | $x \in \mathbb{R}$                                    |

gdzie  $C$  — dowolna stała rzeczywista.

## Twierdzenie o całkach nieoznaczonych

**Twierdzenie 3** (najprostsze reguły całkowania). Jeżeli funkcje  $f$  i  $g$  mają funkcje pierwotne, to

(i)  $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx,$

(ii)  $\int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx,$

(iii)  $\int (cf(x)) dx = c \int f(x) dx,$  gdzie  $c \in \mathbb{R}$

**Przykład 2.** Korzystając z Twierdzenia 3 chcemy obliczyć całkę  $\int (x - 3e^x) dx$ :

$$\int (x - 3e^x) dx = \int x dx - 3 \int e^x dx = \frac{x^2}{2} - 3e^x + C.$$

## Całkowanie przez części

**Twierdzenie 4** (o całkowaniu przez części)). Jeżeli funkcje  $f$  i  $g$  mają ciągłe pochodne, to

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

**Ćwiczenie 1.** Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez części obliczyć podane całkę nieoznaczoną:

$$\int x \cos x dx.$$

Przyjmujemy  $f(x) = x$ ,  $g'(x) = \cos x$ . Wtedy  $f'(x) = 1$  i (można przyjąć np.)  $g(x) = \sin x$ .

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

## Całkowanie przez podstawienie- podstawienie liniowe

**Twierdzenie 5.** *Jeśli*

$$\int f(t)dt = F(t) + C,$$

to

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Dowód wynika z twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej:

$$[F(ax+b)]' = aF'(ax+b) = af(ax+b).$$

**Przykłady.** Z twierdzenia 5 wynika:

(i)  $\int \cos mx \, dx = \frac{1}{m} \sin mx + C,$

(ii)  $\int e^{-2x} \, dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C.$

**Twierdzenie 6** (o całkowaniu przez podstawienie). *Jeśli wiadomo, że*

$$\int g(t)dt = G(t) + C,$$

to

$$\int g(\omega(x))\omega'(x)dx = G(\omega(x)) + C. \quad (2)$$

Zakładamy, że  $g(t)$  i  $\omega'(t)$  są ciągłe.

Dowód tego twierdzenia wynika z twierdzenia o różniczkowaniu funkcji złożonej.

Z twierdzenia tego wnioskiem jest Twierdzenie 5, które odpowiada przypadkowi, gdy funkcja  $\omega$  jest liniowa:

$$\omega(x) = ax + b.$$

### Przykład

Chcemy obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \sin^3 x \cos x dx.$$

Powyższa całka jest postaci takiej, jak wyrażenie po lewej stronie równości (2) — w przypadku, gdy  $g(t) = t^3$  i  $\omega(y) = \sin y$ . Funkcja  $G(t) = \frac{1}{4}t^4$  jest funkcją pierwotną dla  $g(t)$ , stąd

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \frac{1}{4} \sin^4 x + C.$$

### Droga przebyta przez kroplę — c.d.

Możemy teraz łatwo znaleźć funkcję  $s(t)$  z Problemu 1. Mamy  $s(0) = 0$  oraz

$$\int v(t)dt = \int \frac{g}{c}(1 - e^{-ct})dt = \frac{g}{c}\left(t + \frac{1}{c}e^{-ct}\right) + C.$$

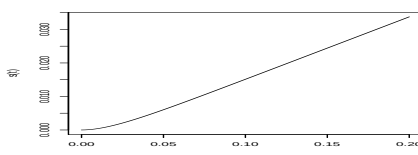
Funkcja  $s$  jest równa funkcji pierwotnej z

$$C = -\frac{g}{c^2},$$

czyli

$$s(t) = \frac{g}{c}\left(t + \frac{1}{c}e^{-ct}\right) - \frac{g}{c^2}.$$

### Droga przebyta przez małą kroplę



Rysunek 2: Droga przebyta przez kroplę o średnicy 0,07 mm w zależności od czasu