

# Wykład 9: Całka oznaczona

dr Mariusz Grządział

semestr zimowy; rok akademicki 2014/2015

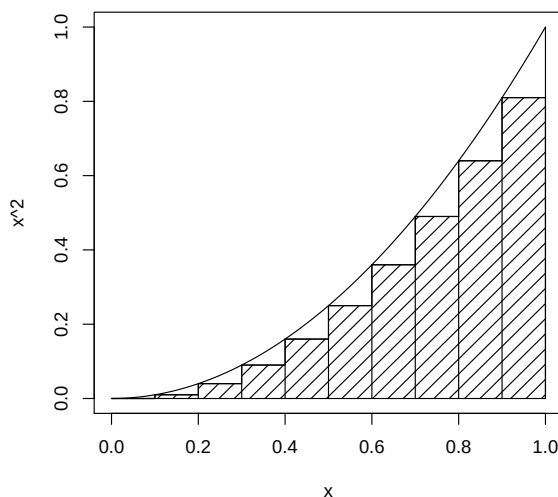
## Pole „trójkąta parabolicznego”

**Problem.** Chcemy obliczyć pole  $s$  figury  $S$  ograniczonej prostą  $y = 0$ , prostą  $x = 1$  i wykresem funkcji  $f(x) = x^2$ .

**Rozwiązanie przybliżone.** Dzielimy odcinek  $[0, 1]$  na  $n$  odcinków o równej długości:

$$\left[0, \frac{1}{n}\right), \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \dots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right].$$

Suma pól prostokątów, których podstawy są równe tym odcinkom a wysokości kwadratowi ich lewych końców -sensowne przybliżenie



Rysunek 1: Obliczanie przybliżonej wartości pola figury  $S$

## Pole „trójkąta parabolicznego”- obliczenia

Oznaczmy pole figury odpowiadającej podziałowi odcinka na  $n$  części przez  $s_n$ . Mamy

$$s_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left( \frac{i-1}{n} \right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (i-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}.$$

Pole figury jest równe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{1}{3} \quad (1)$$

## Definicja całki oznaczonej dla funkcji ciągłej

**Definicja 1.** Załóżmy, że funkcja  $f$  jest ciągła na przedziale  $[a, b]$ . Całkę oznaczoną z funkcji ciągłej  $f$  na przedziale  $[a, b]$  definiujemy wzorem

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f \left( a + (k-1) \frac{b-a}{n} \right) \right]. \quad (2)$$

Korzystając z wprowadzonej notacji, pole „trójkąta parabolicznego” można wyrazić następująco:

$$\int_0^1 x^2 dx.$$

### Definicja całki oznaczonej dla funkcji przedziałami ciągłej

**Uwaga 1.** Wzorem (2) można zdefiniować całkę oznaczoną dla pewnych funkcji nieciągłych, np. dla funkcji przedziałami ciągłych. Funkcję  $f$  nazywamy przedziałami ciągłą na przedziale  $[a, b]$ , jeżeli istnieją liczby  $c_1, c_2, \dots, c_k$  takie, że: (i)  $a < c_1 < \dots < c_k < b$ , (ii)  $f$  jest ograniczona na  $[a, b]$  oraz ciągła na przedziałach  $(a, c_1), (c_1, c_2), \dots, (c_{k-1}, c_k), (c_k, b)$ , (iii)  $f$  ma granice lewostronne w punktach  $a, c_1, \dots, c_k$  oraz prawostronne w  $c_1, \dots, c_k, b$ .

### Całki Riemanna i Lebesgue’a

Potrzeby praktyki (i teorii):

konstrukcja całki pewnych funkcji, które nie są przedziałami ciągłe (na odcinku  $[a, b]$ .)

Konstrukcje takie podali: B. Riemann (1826-1866); H. Lebesgue (1875-1941)

**Całka**  $\int_b^a f(x)dx$  **gdy**  $b < a$

Jeśli  $a < b$ , to będziemy przyjmowali:

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx.$$

oraz (gdy  $a = b$ )

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

### Całka oznaczona funkcji ujemnej-interpretacja geometryczna

Jeśli funkcja  $f$  jest ujemna na przedziale  $[a, b]$ ,  $a < b$ , to całka  $\int_a^b f(x)dx$  jest równa polu figury ograniczonej: prostymi  $y = 0$ ,  $x = a$  i  $x = b$  oraz wykresem funkcji  $f(x)$  pomnożonemu przez  $(-1)$ .

### Zastosowanie do obliczania drogi przebytej w ruchu zmiennym

Punkt materialny porusza się ruchem prostoliniowym z prędkością  $v(t)$  zależną od czasu. Chcemy znaleźć drogę  $s$  przebytą przez ten punkt w przedziale czasowym  $[a, b]$ . Zakładamy, że funkcja  $v$  jest ciągła.

Podzielmy przedział  $[a, b]$  na  $n$  odcinków o równej długości:

$$[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-2}, t_{n-1}], [t_{n-1}, t_n], \text{ gdzie } t_0 = a, t_n = b$$

droga przebyta przez punkt materialny w przedziale czasowym  $[t_{i-1}, t_i] = [a + (i-1)\frac{b-a}{n}, a + i\frac{b-a}{n}]$  lub  $[t_{i-1}, t_i] = [a + (i-1)\frac{b-a}{n}, a + i\frac{b-a}{n}]$  jest równa w przybliżeniu  $v(t_{i-1})\frac{b-a}{n}$ . wartość przybliżona drogi przebytej przez punkt materialny na przedziale:  $[a, b]$  jest:

$$s_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n v \left( a + (i-1) \frac{b-a}{n} \right). \quad (3)$$

### Zastosowanie do obliczania drogi przebytej w ruchu zmiennym— c.d.

Przechodząc do granicy ( $n \rightarrow \infty$ ):

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \int_a^b v(t)dt.$$

Jeśli  $V(t)$  jest dowolną funkcją pierwotną funkcji  $v(t)$  na przedziale  $I = [a, b]$ , wtedy droga przebyta przez punkt materialny w przedziale czasowym  $[a, b]$  jest równa  $V(b) - V(a)$ .

### Twierdzenie Newtona-Leibniza

**Twierdzenie 1.** Jeżeli funkcja  $f$  jest ciągła na przedziale  $[a, b]$ , to

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad (4)$$

gdzie  $F$  oznacza dowolną funkcję pierwotną funkcji  $f$  na tym przedziale.

Twierdzenie to ma interpretację fizyczną: Droga przebyta przez punkt materialny na przedziale czasowym  $[a, b]$  jest równa  $V(b) - V(a)$ , gdzie  $V$  jest dowolną funkcją pierwotną prędkości  $v$  na  $[a, b]$ . Precyzyjny dowód Tw. Newtona-Leibniza można znaleźć np. książce W. Rudina „Podstawy analizy matematycznej”, paragraf 6.20.

**Uwaga** Niektórzy autorzy definiują całkę oznaczoną korzystając z równości (4).

**Uwaga.** Zamiast  $F(b) - F(a)$  będziemy pisali  $F(x)|_a^b$  lub  $[F(x)]_a^b$ .

### Przykłady

**Przykład 1.** Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_0^1 x^2 dx.$$

Mamy: na przedziale  $[0, 1]$

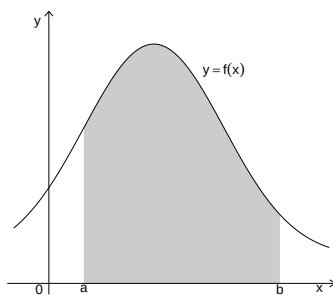
$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C,$$

stąd:

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

### Zastosowania całki oznaczonej— pole trapezu krzywoliniowego

Figurę ograniczoną: wykresem funkcji  $f$ , gdzie  $f$  jest funkcją ciągłą i nieujemną na przedziale  $[a, b]$ , prostymi  $x = a$ ,  $x = b$  oraz prostą  $y = 0$  będziemy nazywać trapezem krzywoliniowym.



Rysunek 2: Trapez krzywoliniowy

### Zastosowania całki oznaczonej— obliczanie pola figur

Chcemy obliczyć pole figury ograniczonej przez: wykres funkcji  $f(x) = \sin x$  oraz proste:  $x = 0$ ,  $x = \pi$  i  $y = 0$ , tj. chcemy znaleźć pole trapezu krzywoliniowego odpowiadającego funkcji  $f(x) = \sin x$  i odcinkowi  $[0, \pi]$ .

Pole to jest równe:

$$\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2.$$

### Zastosowania całki oznaczonej— obliczanie pola figur

Chcemy obliczyć pole figury ograniczonej przez: wykres funkcji  $f(x) = \sin 2x$  oraz proste:  $x = 0$ ,  $x = \pi/2$  i  $y = 0$ , tj. chcemy znaleźć pole trapezu krzywoliniowego odpowiadającego funkcji  $f(x) = \sin 2x$  i odcinkowi  $[0, \pi/2]$ .

Pole to jest równe:

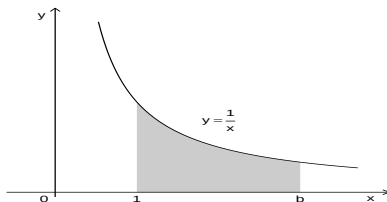
$$\int_0^{\pi/2} \sin 2x dx = [-\cos 2x]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{2} \cos \pi - \frac{1}{2}(-\cos 0) = 1.$$

**Zastosowania całki oznaczonej— obliczanie pola figur— c.d.**

Chcemy obliczyć pole figury ograniczonej przez: wykres funkcji  $f(x) = \frac{1}{x}$  oraz proste:  $x = 1$ ,  $x = b$  i  $y = 0$ , gdzie  $b > 1$ , tj. chcemy znaleźć pole trapezu krzywoliniowego odpowiadającego funkcji  $f(x) = \frac{1}{x}$  i odcinkowi  $[1, b]$ .

Pole to jest równe:

$$\int_1^b \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^b = \ln b - \ln 1 = \ln b.$$

**Zastosowania całki oznaczonej— obliczanie pola figur— c.d.**

Rysunek 3: Logarytm naturalny liczby  $b > 1$  jako pole trapezu krzywoliniowego odpowiadającemu funkcji  $f(x) = \frac{1}{x}$  i odcinkowi  $[1, b]$ .

**Zastosowania całki oznaczonej— droga przebyta przez punkt materialny**

Punkt materialny porusza się z prędkością  $v(t) = \cos t$ . Chcemy znaleźć  $s(T)$ , położeniu punktu w czasie  $T = \pi$ . Zakładamy, że  $s(0) = 0$ .

Mamy

$$s(\pi) = \int_0^\pi \cos t dt = [-\sin t]_0^\pi = 0 - 0 = 0.$$

**Zastosowania całki oznaczonej— droga przebyta przez punkt materialny— c.d.**

Zenek podczas zawodów biegnie z prędkością

$$v_Z(t) = 8e^{-0,01t} [m/sek], \quad t \geq 0.$$

Chcemy znaleźć dystans przebyty przez Zenka do chwili  $T = 100$ .

Droga przebyta przez Zenka (chwili  $T = 100$ ) jest równa:

$$\begin{aligned} \int_0^{100} v_Z(t) dt &= \left[ 8 \frac{1}{-0,01} e^{-0,01t} \right]_0^{100} = \\ &= \left[ -\frac{8}{0,01} e^{-0,01t} \right]_0^{100} = -800(e^{-1} - 1) = 800(1 - e^{-1}) \approx 505,6964. \end{aligned}$$