

1. Rozwiąż nierówność:

$$\left| \frac{1}{2}x - 1 \right| < 5.$$

2. Oblicz pole trapezu krzywoliniowego ograniczonego przez proste $y = 0$, $x = (-1)$, $x = 1$ i wykres funkcji $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

3. Oblicz pole trapezu krzywoliniowego ograniczonego przez proste $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$ i wykres funkcji g określonej wzorem:

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{dla } x \in [0, 1], \\ 2 - x, & \text{dla } x \in (1, 2], \\ 0, & \text{dla } x \notin [0, 2]. \end{cases}$$

4. Oblicz:

- (a) $\log_2 64$;
- (b) $\log_8 32$;
- (c) $\log_2 \sqrt{2}$;
- (d) $2^{\log_4 3}$.

5. Oprocentowanie na koncie oszczędnościowym w banku B wynosi 10% w skali roku. Na koncie tym obowiązuje roczna kapitalizacja odsetek, tj. kwota złożona na koncie powiększa się o 10% po roku oszczędzania. Pan A zdeponował 1000 zł na koncie oszczędnościowym w tym banku. Zakładamy, że przed upływem 10 lat pan A nie będzie zmieniał stanu konta, tj. nie będzie wpłacał ani wypłacał z niego pieniędzy. Jaka kwota będzie się znajdować na jego koncie po:

- (a) dwóch latach oszczędzania;
- (b) dziesięciu latach oszczędzania.

6. Po ilu latach oszczędzania kwota złożona przez pana A na koncie oszczędnościowym w banku B ulegnie podwojeniu, tj. będzie większa lub równa 2000 zł? Zakładamy, że pan A przed podwojeniem stanu konta w banku B nie będzie wpłacał ani wypłacał żadnych pieniędzy na to konto.

7. W jaki sposób można „otrzymać” wykres funkcji $f(x) = \log_{10} x$ z wykresu funkcji $g(x) = \log_2 x$?

Wskazówka Można skorzystać z równości $\log_a x = \log_b x / \log_b a$ zachodzącej dla $x > 0$ oraz a, b dodatnich i różnych od 1.

8. Uzasadnij, że złożenie $g(f(x))$ funkcji logarytmicznej $z = g(y) = \log_b y$ i funkcji wykładniczej $y = f(x) = a^x$ jest funkcją liniową (tj. $h(x) = cx + d$, gdzie $c, d \in \mathbb{R}$).

9. Wyznacz złożenie $h = g(f(x))$ funkcji g i f dla:

- (a) $f(x) = x^2$; $g(y) = y^3$;
- (b) $f(x) = x^4$; $g(y) = y^3$;
- (c) $f(x) = \sin x$; $g(y) = 2^y$;
- (d) $f(x) = 3x + 1$; $g(y) = \frac{y}{3} - \frac{1}{3}$.

We wszystkich przypadkach należy przyjąć, że dziedzina funkcji h jest równa dziedzinie naturalnej funkcji f .

10. Naskicuj wykresy funkcji $h(x) = f(g(x))$ dla $f(x) = \sin x$:

- (a) $g(x) = 2x$;

(b) $g(x) = 3x - 1$.

11. Uzasadnij, że:

- (a) złożenie funkcji rosnących jest funkcją rosnącą;
- (b) złożenie funkcji niemalejącej i nierosnącej jest funkcją nierosnącą;
- (c) złożenie funkcji rosnącej i malejącej jest funkcją malejącą;
- (d) złożenie funkcji nierosnących jest funkcją niemalejącą.

12. Uzasadnij, że funkcja

$$f(x) = 2^{x^2}$$

jest:

- (a) malejąca na przedziale $(-\infty, 0]$;
- (b) rosnąca na przedziale $[0, \infty)$.

Dla jakiej wartości argumentu funkcja f przybiera wartość minimalną?

13. Uzasadnij, że funkcja

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$$

jest:

- (a) rosnąca na przedziale $(-\infty, -1]$;
- (b) malejąca na przedziale $[-1, \infty)$.

Dla jakiej wartości argumentu funkcja f przybiera wartość maksymalną?

14. Znajdź funkcje odwrotne do podanych:

- (a) $f(x) = 1 + x^3$;
- (b) $g(x) = 2^x$;
- (c) $h(x) = 3^x + 1$.

Mariusz Grządziel