

1. (a) Niech $S(t)$ oznacza położenie na osi punktu materialnego poruszającego się wzdłuż osi OX w chwili t . Podać interpretację fizyczną ilorazu różnicowego

$$\frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}$$

oraz pochodnej

$$S'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}.$$

- (b) Niech $v(t)$ oznacza szybkość punktu materialnego poruszającego się wzdłuż osi OX w chwili t . Podać interpretację fizyczną ilorazu różnicowego

$$\frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}$$

oraz pochodnej

$$v'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}.$$

2. Oblicz

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

dla :

- (a) funkcji $f(x) = c$ i $x_0 \in \mathbb{R}$, gdzie c jest ustaloną liczbą rzeczywistą;
 - (b) funkcji $f(x) = 2x - 3$ i $x_0 \in \mathbb{R}$;
 - (c) funkcji $f(x) = x^3$ i $x_0 \in \mathbb{R}$;
 - (d) funkcji $f(x) = x^{-1}$ i $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
3. Znajdź asymptotę poziomą w $-\infty$ funkcji $f(x) = e^x + 3$.
4. Liczebność populacji pewnych gatunków zwierząt można opisać za pomocą funkcji logistycznej określonej wzorem:

$$f(t) = \frac{a}{1 + be^{-ct}},$$

gdzie $a > 0$, $b > 0$ i $c > 0$ są pewnymi stałymi („parametrami trendu logistycznego”). Znajdź asymptoty poziome w $-\infty$ i ∞ funkcji f .

5. Funkcja *signum*, oznaczana przez sgn , określona jest wzorem:

$$sgn(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

- (a) Oblicz granice: prawostronną i lewostronną funkcji *signum* w punkcie $x_0 = 0$.
- (b) Uzasadnij, że funkcja *signum* jest ciągła na $(0, \infty)$.
- (c) Uzasadnij, że funkcja ta nie jest ciągła na $(-\infty, \infty)$.

Mariusz Grządziel