

1. Funkcja
- f
- dana jest wzorem

$$f(x) = ax + b.$$

Przyjmujemy, że $D_f = \mathbb{R}$. Udowodnij, że dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest równość $f'(x_0) = a$.

2. Funkcja
- f
- dana jest wzorem

$$f(x) = x^2.$$

Przyjmujemy, że $D_f = \mathbb{R}$. Udowodnij, że dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest równość $f'(x_0) = 2x_0$.

3. Funkcja kwadratowa
- f
- dana jest wzorem

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

gdzie a , b i c są pewnymi ustalonymi liczbami rzeczywistymi. Przyjmujemy, że $D_f = \mathbb{R}$. Udowodnij, że dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest równość $f'(x_0) = 2ax_0 + b$.

Wskazówka Można wykorzystać z równości, które należało udowodnić w poprzednich dwóch zadaniach oraz z twierdzenia o arytmetyce granic funkcji.

4. Ołowiana kulkę, rzuconą (pionowo) do góry z prędkością
- $v_0 = 20\text{m/s}$
- . Wysokość kulki
- $h(t)$
- w czasie
- t
- jest równa

$$h(t) = v_0 t - g \frac{t^2}{2}.$$

Przyjmujemy wartość $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Dziedzina funkcji h (oznaczona przez D_h) jest określona równością $D_h = [0, 4]$.

Przez sieczną odpowiadającą funkcji f , punktowi x_0 i przyrostowi $\Delta x \neq 0$, gdzie x_0 i $x_0 + \Delta x$ są punktami należącymi do D_f , będziemy rozumieć prostą przechodzącą przez punkty $(x_0, f(x_0))$ i $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$.

Wyznacz:

- (a) równanie siecznej odpowiadających funkcji h , punktowi $t_0 = 1$ i przyrostowi $\Delta t = 0,5$;
- (b) wartość pochodnej funkcji h dla $t_0 = 1$;
- (c) równanie stycznej do wykresu funkcji h w punkcie $(1, 15)$.

Naszkicuj na jednym rysunku wykres funkcji h oraz sieczną i styczną, których równania zostały wyznaczone (w podpunktach (a) i (c)).

Następnie wyznacz:

- (d) równanie siecznej odpowiadających funkcji h , punktowi $t_0 = 2$ i przyrostowi $\Delta t = -1$;
- (e) wartość pochodnej funkcji h dla $t_0 = 2$;
- (f) równanie stycznej do wykresu funkcji h w punkcie $(2, 20)$

i naszkicuj na jednym rysunku wykres funkcji h oraz sieczną i styczną, których równania zostały wyznaczone (w podpunktach (d) i (f)).

5. Oblicz pochodne: prawostronną i lewostronną funkcji
- f
- w punkcie
- $x_0 = 0$
- dla funkcji określonej wzorem

$$f(x) = 2|x|.$$

- (a) Czy funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$?
- (b) Czy funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \neq 0$?