

Wykład 10: Całka nieoznaczona

dr Mariusz Grządziel

Katedra Matematyki, Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu

semestr zimowy, rok akademicki 2016/2017

Motywacja

Problem 1

Kropla wody o średnicy 0,07 mm porusza się z prędkością

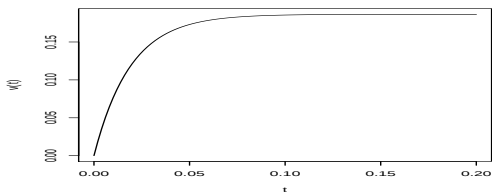
$$v(t) = \frac{g}{c}(1 - e^{-ct}),$$

gdzie g oznacza przyspieszenie ziemskie, a stała $c = 52,6 \frac{1}{s}$ została wyznaczona eksperymentalnie.

W chwili $t = 0$ prędkość jest równa 0.

Chcemy znaleźć drogę $s(t)$, jaką przebyło ciało po upływie czasu t .

Prędkość małej kropli



Rysunek: Prędkość kropli o średnicy 0,07 mm w zależności od czasu

Funkcja pierwotna

Problem sprowadza się do znalezienia funkcji $s(t)$ takiej, że

$$s'(t) = v(t), t \in (0, \infty). \quad (1)$$

Definicja 1 (funkcji pierwotnej)

Funkcja F jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale otwartym I , jeśli

$$F'(x) = f(x) \text{ dla każdego } x \in I.$$

Uwaga Jeżeli funkcja f jest określona na przedziale domkniętym $[a, b]$, to F nazywamy funkcją pierwotną funkcji f , jeżeli

$$F'(x) = f(x) \text{ dla } x \in (a, b), \quad F'_+(a) = f(a), \quad F'_-(b) = f(b).$$

Funkcja pierwotna — przykłady

Przykład 1

Funkcjami pierwotnymi $f(x) = x^3$ na przedziale $\mathcal{I} = \mathbb{R}$ są na przykład:

- ▶ $F_1(x) = \frac{x^4}{4} + 2;$
- ▶ $F_2(x) = \frac{x^4}{4} - 3.$

Twierdzenie 1

Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I . Wtedy

(i) $G(x) = F(x) + C$, gdzie $C \in \mathbb{R}$, jest funkcją pierwotną funkcji f na I ,

(ii) każdą funkcję pierwotną funkcji f na I można przedstawić w postaci $F(x) + D$, gdzie $D \in \mathbb{R}$.

Uwaga. Powyższe twierdzenie mówi o postaci funkcji pierwotnych dla ustalonej funkcji. Funkcje pierwotne mają postać $F(x) + C$

Twierdzenie 2

Jeżeli funkcja jest ciągła na przedziale, to ma funkcję pierwotną na tym przedziale.

Uwaga. Funkcja pierwotna funkcji elementarnej nie musi być funkcją elementarną, np. pierwotna funkcji:

$$f(x) = e^{-x^2}$$

nie jest funkcją elementarną.

Uwaga Pojęcie funkcji elementarnej zostało określone podczas wykładu 2-go (por. Definicja 15)

Całki nieoznaczone

Definicja 2 (całki nieoznaczonej)

*Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I .
Całką nieoznaczoną funkcji f na przedziale I oznaczamy zbiór funkcji*

$$\{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}.$$

Całkę nieoznaczoną funkcji f oznaczamy przez $\int f(x)dx$.

Całka oznaczona — notacja

Uwaga. W dalszej części wykładu będziemy opuszczali nawiasy klamrowe w definicji całki nieoznaczonej, a więc np. zamiast pisać

$$\int x dx = \left\{ \frac{x^2}{2} + C, C \in \mathbb{R} \right\}$$

będziemy pisać:

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C.$$

Całki nieoznaczone ważniejszych funkcji elementarnych

Wzór	Zakres zmienności
$\int 0 dx = C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ oraz $x \in \mathbb{R}$
$\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$	$p = -2, -3, \dots; x < 0$ lub $x > 0$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$x \in (-\infty, 0)$ lub $x \in (0, \infty)$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$0 < a \neq 1$ oraz $x \in \mathbb{R}$
$\int e^x dx = e^x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$x \in \mathbb{R}$

gdzie C — dowolna stała rzeczywista.

Twierdzenie o całkach nieoznaczonych

Twierdzenie 3 (najprostsze reguły całkowania)

Jeżeli funkcje f i g mają funkcje pierwotne, to

$$(i) \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx,$$

$$(ii) \int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx,$$

$$(iii) \int (cf(x)) dx = c \int f(x) dx, \text{ gdzie } c \in \mathbb{R}$$

Przykład 2

Korzystając z Twierdzenia 3 chcemy obliczyć całkę

$$\int (x - 3e^x) dx:$$

$$\int (x - 3e^x) dx = \int x dx - 3 \int e^x dx = \frac{x^2}{2} - 3e^x + C.$$

Całkowanie przez części

Twierdzenie 4 (o całkowaniu przez części))

Jeżeli funkcje f i g mają ciągłe pochodne, to

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Ćwiczenie 1

Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez części obliczyć podane całkę nieoznaczoną:

$$\int x \cos x dx.$$

Przyjmujemy $f(x) = x$, $g'(x) = \cos x$.

Wtedy $f'(x) = 1$ i (można przyjąć np.) $g(x) = \sin x$.

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Całkowanie przez podstawienie- podstawienie liniowe

Twierdzenie 5

Jeśli

$$\int f(t)dt = F(t) + C,$$

to

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C.$$

Dowód wynika z twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej:

$$[F(ax + b)]' = aF'(ax + b) = af(ax + b).$$

Przykłady. Z twierdzenia 5 wynika:

(i) $\int \cos mx \, dx = \frac{1}{m} \sin mx + C,$

(ii) $\int e^{-2x} \, dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C.$

Twierdzenie 6 (o całkowaniu przez podstawienie)

Jeśli wiadomo, że

$$\int g(t)dt = G(t) + C,$$

to

$$\int g(\omega(x))\omega'(x)dx = G(\omega(x)) + C. \quad (2)$$

Zakładamy, że $g(t)$ i $\omega'(t)$ są ciągłe.

Dowód tego twierdzenia wynika z twierdzenia o różniczkowaniu funkcji złożonej.

Z twierdzenia tego wnioskiem jest Twierdzenie 5, które odpowiada przypadkowi, gdy funkcja ω jest liniowa:

$$\omega(x) = ax + b.$$

Przykład

Chcemy obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \sin^3 x \cos x dx.$$

Powyższa całka jest postaci takiej, jak wyrażenie po lewej stronie równości (2) — w przypadku, gdy $g(t) = t^3$ i $\omega(y) = \sin y$. Funkcja $G(t) = \frac{1}{4}t^4$ jest funkcją pierwotną dla $g(t)$, stąd

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \frac{1}{4} \sin^4 x + C.$$

Droga przebyta przez kroplę — c.d.

Możemy teraz łatwo znaleźć funkcję $s(t)$ z Problemu 1. Mamy $s(0) = 0$ oraz

$$\int v(t) dt = \int \frac{g}{c}(1 - e^{-ct}) dt = \frac{g}{c}(t + \frac{1}{c}e^{-ct}) + C.$$

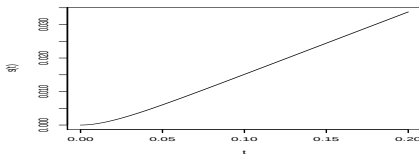
Funkcja s jest równa funkcji pierwotnej z

$$C = -\frac{g}{c^2},$$

czyli

$$s(t) = \frac{g}{c}(t + \frac{1}{c}e^{-ct}) - \frac{g}{c^2}.$$

Droga przebyta przez małą kroplę



Rysunek: Droga przebyta przez kroplę o średnicy 0,07 mm w zależności od czasu