

Wykłady 11 i 12: Całka oznaczona

dr Mariusz Grządziel

Katedra Matematyki, Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu

semestr zimowy; rok akademicki 2016/2017

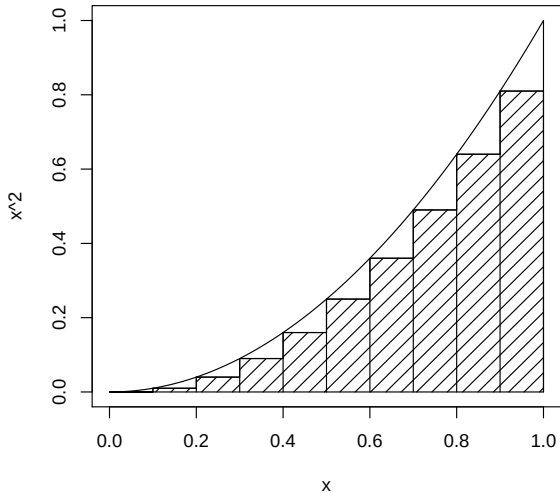
Pole „trójkąta parabolicznego”

Problem. Chcemy obliczyć pole s figury S ograniczonej prostą $y = 0$, prostą $x = 1$ i wykresem funkcji $f(x) = x^2$.

Rozwiązanie przybliżone. Dzielimy odcinek $[0, 1]$ na n odcinków o równej długości:

$$\left[0, \frac{1}{n}\right), \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \dots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right).$$

Suma pól prostokątów, których podstawy są równe tym odcinkom a wysokości kwadratami ich lewych końców -sensowne przybliżenie



Rysunek: Obliczanie przybliżonej wartości pola figury S

Pole „trójkąta parabolicznego”- obliczenia

Oznaczmy pole figury odpowiadającej podziałowi odcinka na n części przez s_n . Mamy

$$s_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{i-1}{n} \right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (i-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}.$$

Pole figury jest równe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{1}{3} \quad (1)$$

Definicja całki oznaczonej dla funkcji ciągłej

Definicja

Załóżmy, że funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$. Całkę oznaczoną z funkcji ciągłej f na przedziale $[a, b]$ definiujemy wzorem

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f \left(a + (k-1) \frac{b-a}{n} \right) \right]. \quad (2)$$

Korzystając z wprowadzonej notacji, pole „trójkąta parabolicznego” można wyrazić następująco:

$$\int_0^1 x^2 dx.$$

Definicja całki oznaczonej dla funkcji przedziałami ciągłej

Uwaga 1. Wzorem (2) można zdefiniować całkę oznaczoną dla pewnych funkcji nieciągłych, np. dla funkcji przedziałami ciągłych. Funkcję f nazywamy przedziałami ciągłą na przedziale $[a, b]$, jeżeli istnieją liczby $c_1, c_2, \dots, c_k$ takie, że:

- (i) $a < c_1 < \dots < c_k < b$,
- (ii) f jest ograniczona na $[a, b]$ oraz ciągła na przedziałach $(a, c_1), (c_1, c_2), \dots, (c_{k-1}, c_k), (c_k, b)$,
- (iii) f ma granice lewostronne w punktach $a, c_1, \dots, c_k$ oraz prawostronne w $c_1, \dots, c_k, b$.

Całki Riemanna i Lebesgue'a

Potrzeby praktyki (i teorii):

konstrukcja całki pewnych funkcji, które nie są przedziałami
ciągłe (na odcinku $[a, b]$.)

Konstrukcje takie podali:

B. Riemann (1826-1866);

H. Lebesgue (1875-1941)

Całka $\int_b^a f(x)dx$ gdy $b < a$

Jeśli $a < b$, to będziemy przyjmowali:

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx.$$

oraz (gdy $a = b$)

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Całka oznaczona funkcji ujemnej-interpretacja geometryczna

Jeśli funkcja f jest ujemna na przedziale $[a, b]$, $a < b$, to całka $\int_a^b f(x)dx$ jest równa polu figury ograniczonej: prostymi $y = 0$, $x = a$ i $x = b$ oraz wykresem funkcji $f(x)$ pomnożonemu przez (-1) .

Zastosowanie do obliczania drogi przebytej w ruchu zmiennym

Punkt materialny porusza się ruchem prostoliniowym z prędkością $v(t)$ zależną od czasu. Chcemy znaleźć drogę s przebytą przez ten punkt w przedziale czasowym $[a, b]$. Zakładamy, że funkcja v jest ciągła.

Podzielmy przedział $[a, b]$ na n odcinków o równej długości:

$$[t_0, t_1), [t_1, t_2), \dots, [t_{n-2}, t_{n-1}), [t_{n-1}, t_n], \text{ gdzie } t_0 = a, t_n = b$$

droga przebyta przez punkt materialny w przedziale czasowym

$$[t_{i-1}, t_i] = \left[a + (i-1) \frac{b-a}{n}, a + i \frac{b-a}{n} \right] \text{ lub}$$

$$[t_{i-1}, t_i) = \left[a + (i-1) \frac{b-a}{n}, a + i \frac{b-a}{n} \right) \text{ jest równa w przybliżeniu}$$
$$v(t_{i-1}) \frac{b-a}{n}.$$

wartość przybliżona drogi przebytej przez punkt materialny na przedziale: $[a, b]$ jest:

$$s_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n v \left(a + (i-1) \frac{b-a}{n} \right). \quad (3)$$

Zastosowanie do obliczania drogi przebytej w ruchu zmiennym— c.d.

Przechodząc do granicy ($n \rightarrow \infty$):

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \int_a^b v(t) dt.$$

Jeśli $V(t)$ jest dowolną funkcją pierwotną funkcji $v(t)$ na przedziale $I = [a, b]$, wtedy droga przebyta przez punkt materialny w przedziale czasowym $[a, b]$ jest równa $V(b) - V(a)$.

Twierdzenie Newtona-Leibniza

Twierdzenie

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$, to

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (4)$$

gdzie F oznacza dowolną funkcję pierwotną funkcji f na tym przedziale.

Twierdzenie to ma interpretację fizyczną: Droga przebyta przez punkt materialny na przedziale czasowym $[a, b]$ jest równa $V(b) - V(a)$, gdzie V jest dowolną funkcją pierwotną prędkości v na $[a, b]$. Precyzyjny dowód Tw. Newtona-Leibniza można znaleźć np. książce W. Rudina „Podstawy analizy matematycznej”, paragraf 6.20.

Uwaga Niektórzy autorzy definiują całkę oznaczoną korzystając z równości (4).

Uwaga. Zamiast $F(b) - F(a)$ będziemy pisali $F(x)|_a^b$ lub $[F(x)]_a^b$.

Przykłady

Przykład 1. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_0^1 x^2 dx.$$

Mamy: na przedziale $[0, 1]$

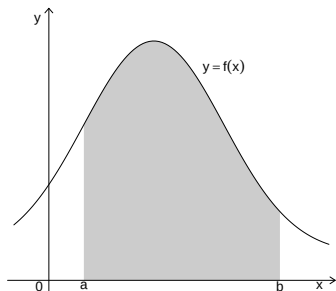
$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C,$$

stąd:

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Zastosowania całki oznaczonej— pole trapezu krzywoliniowego

Figurę ograniczoną: wykresem funkcji f , gdzie f jest funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$, prostymi $x = a$, $x = b$ oraz prostą $y = 0$ będziemy nazywać trapezem krzywoliniowym.



Zastosowania całki oznaczonej— obliczanie pola figur

Chcemy obliczyć pole figury ograniczonej przez: wykres funkcji $f(x) = \sin x$ oraz proste: $x = 0$, $x = \pi$ i $y = 0$, tj. chcemy znaleźć pole trapezu krzywoliniowego odpowiadającego funkcji $f(x) = \sin x$ i odcinkowi $[0, \pi]$.

Pole to jest równe:

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2.$$

Zastosowania całki oznaczonej— obliczanie pola figur

Chcemy obliczyć pole figury ograniczonej przez: wykres funkcji $f(x) = \sin 2x$ oraz proste: $x = 0$, $x = \pi/2$ i $y = 0$, tj. chcemy znaleźć pole trapezu krzywoliniowego odpowiadającego funkcji $f(x) = \sin 2x$ i odcinkowi $[0, \pi/2]$.

Pole to jest równe:

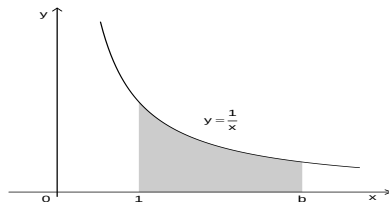
$$\int_0^{\pi/2} \sin 2x dx = [-\cos 2x]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{2} \cos \pi - \frac{1}{2}(-\cos 0) = 1.$$

Zastosowania całki oznaczonej— obliczanie pola figur— c.d.

Chcemy obliczyć pole figury ograniczonej przez: wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ oraz proste: $x = 1$, $x = b$ i $y = 0$, gdzie $b > 1$, tj. chcemy znaleźć pole trapezu krzywoliniowego odpowiadającego funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ i odcinkowi $[1, b]$. Pole to jest równe:

$$\int_1^b \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^b = \ln b - \ln 1 = \ln b.$$

Zastosowania całki oznaczonej— obliczanie pola figur— c.d.



Rysunek: Logarytm naturalny liczby $b > 1$ jako pole trapezu krzywoliniowego odpowiadającemu funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ i odcinkowi $[1, b]$.

Zastosowania całki oznaczonej— droga przebyta przez punkt materialny

Punkt materialny porusza się z prędkością $v(t) = \cos t$.
Chcemy znaleźć $s(T)$, położeniu punktu w czasie $T = \pi$.
Zakładamy, że $s(0) = 0$.

Mamy

$$s(\pi) = \int_0^{\pi} \cos t dt = [-\sin t]_0^{\pi} = 0 - 0 = 0.$$

Zastosowania całki oznaczonej— droga przebyta przez punkt materialny— c.d.

Zenek podczas zawodów biegnie z prędkością

$$v_Z(t) = 8e^{-0,01t} [m/sek], \quad t \geq 0.$$

Chcemy znaleźć dystans przebyty przez Zenka do chwili $T = 100$.

Droga przebyta przez Zenka (chwili $T = 100$) jest równa:

$$\begin{aligned} \int_0^{100} v_Z(t) dt &= \left[8 \frac{1}{-0,01} e^{-0,01t} \right]_0^{100} = \\ &= \left[-\frac{8}{0,01} e^{-0,01t} \right]_0^{100} = -800(e^{-1} - 1) = 800(1 - e^{-1}) \approx 505,6964. \end{aligned}$$