

Pochodna funkcji: zastosowania przyrodnicze — wykłady 7 i 8

dr Mariusz Grządziel

Katedra Matematyki, Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu

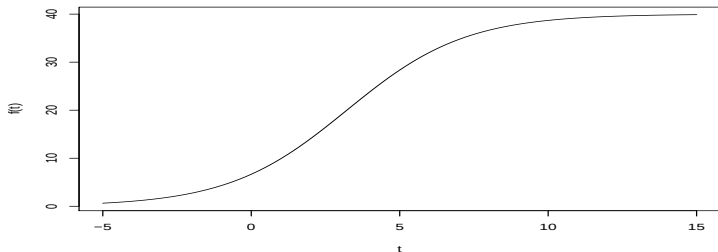
sem. zimowy, r. akad. 2016/2017

Funkcja logistyczna

Rozważmy funkcję logistyczną $y = f_0(t) = \frac{40}{1+5e^{-0,5t}}$.

Funkcja f może być wykorzystana np. do modelowania wzrostu masy ziaren kukurydzy. Zmienna t oznaczać mogłaby czas wegetacji mierzony w tygodniach, a zmienna y masę 100 ziaren kukurydzy, wyrażoną w gramach, por. A. Dąbrowski i in., *15 godzin z pakietem Statgraphics*, Wyd. AR Wrocław, 1993, rozdz. 11.

Funkcja logistyczna – c.d.



Rysunek: Wykres funkcji $y = f_0(t) = \frac{40}{1+5e^{-0,5t}}$

Chcemy: (a) obliczyć pochodną funkcji f w punkcie $x_0 = 5$, (b) znaleźć punkt, w którym tempo wzrostu funkcji f „przestaje rosnąć”.

Funkcja logistyczna

Funkcja logistyczna: ogólna postać:

$$f(t) = \frac{a}{1 + be^{-ct}}.$$

Zastosowania: modelowanie wzrostu populacji zwierząt, wzrostu masy roślin, zmiany w popycie na niektóre artykuły wprowadzane na rynek.

Dziedziną naturalną funkcji f jest $\mathbb{R}$, ale w zastosowaniach przyjmujemy $D_f = [0, \infty)$.

Prędkość wzrostu w chwili t_0 – wartość przybliżona

Chcąc znaleźć wartość przybliżoną prędkości wzrostu funkcji f_0 w chwili $t_0 = 5$ można obliczyć iloraz

$$\frac{f_0(5 + \Delta x) - f_0(5)}{\Delta x}, \quad (1)$$

gdzie Δx jest równa np. 0,01 lub 0,001.

Można sprawdzić, że wyrażenie (1) dla $\Delta x = 0,01$ jest równe 4,122012 a dla $\Delta x = 0,001$ jest równe 4,125897.

Wyrażenie (1), tzw. iloraz różnicowy; jego granica przy $\Delta x \rightarrow 0$: pochodna funkcji f_0 w $x_0 = 5$.

Iloraz różnicowy

Definicja

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0, r)$, gdzie $r > 0$ oraz przyrost Δx niech będzie liczbą spełniającą nierówność $0 < |\Delta x| < r$. Ilorazem różnicowym funkcji f w punkcie x_0 odpowiadającym przyrostowi Δx nazywamy liczbę

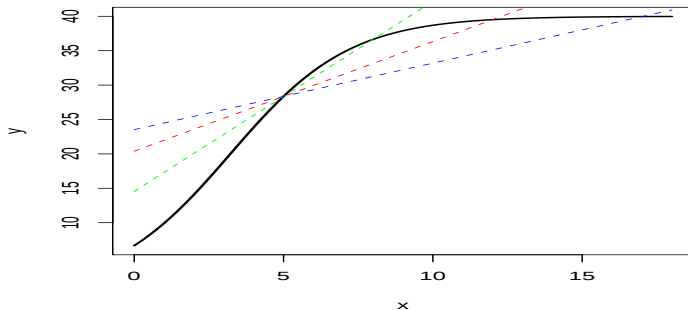
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$: przyrost wartości funkcji f odpowiadający przyrostowi Δx .

Interpretacja geometryczna ilorazu różnicowego

Iloraz różnicowy jest równa współczynnikowi kierunkowemu prostej przechodzącej przez punkty $(x_0, f(x_0))$ i $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ (tzw. siecznej).

Interpretacja geometryczna ilorazu różnicowego— c.d.



Rysunek: Sieczne do funkcji f_0 dla $x_0 = 5$ i wartości $\Delta x = 3, 7$, i 12 .

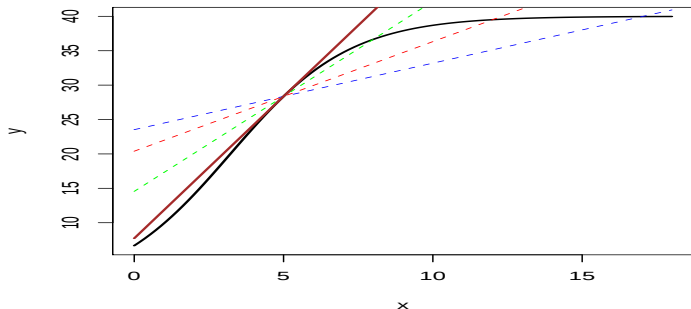
Interpretacja geometryczna pochodnej

Definicja (stycznej do wykresu funkcji)

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja ciągła f będzie określona przynajmniej na otoczeniu x_0 . Prosta jest styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$, jeżeli jest granicznym położeniem siecznych funkcji f przechodzących przez punkty $(x_0, f(x_0))$, $(x, f(x))$, gdy $x \rightarrow x_0$.

Geometrycznie styczna jest prostą, która w sąsiedztwie punktu styczności „najlepiej” przybliża wykres funkcji. Nie jest prawdą, że każda prosta która ma tylko jeden punkt wspólny z wykresem jest do niego styczna.

Interpretacja geometryczna pochodnej- c.d.



Rysunek: Styczna jako graniczne położenie siecznych

Równanie stycznej: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, gdzie $x_0 = 5$.
Pytanie: jak obliczać $f'(x_0)$ gdy f jest bardziej „skomplikowana” niż funkcja s dana wzorem $s(t) = \frac{gt^2}{2}$? Czy korzystając z definicji pochodnej?

Pochodne ważniejszych funkcji elementarnych

Wzór	Zakres zmienności
$(c)' = 0$	$c \in \mathbb{R}$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$n \in \mathbb{N}$ oraz $x \in \mathbb{R}$
$(x^p)' = px^{p-1}$	$p \in \{-1, -2, -3, \dots\}$ oraz $x \neq 0$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, Zakres zmiennej x zależy α
$(\sin x)' = \cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$0 < a \neq 1$ oraz $x > 0$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$x > 0$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$0 < a \neq 1$ oraz $x \in \mathbb{R}$
$(e^x)' = e^x$	$x \in \mathbb{R}$

Pochodna $f(x) = x^n$

Dla $n \in \mathbb{N}$, $x, x_0 \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$ mamy:

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \dots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}.$$

Gdy $x \rightarrow x_0$ każdy ze składników sumy z prawej strony równości dąży do x_0^{n-1} . Cała suma dąży zatem do nx_0^{n-1} . Uzasadnia to równość $(x^n)' = nx^{n-1}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Twierdzenia o pochodnych funkcji

Twierdzenie

(o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu oraz ilorazu funkcji).

Jeżeli funkcje f i g mają pochodne właściwe w punkcie x_0 , to

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0); \quad (2)$$

$$(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0); \quad (3)$$

$$(cf)'(x_0) = cf'(x_0), \text{ gdzie } c \in \mathbb{R}; \quad (4)$$

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0); \quad (5)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}, \text{ o ile } g(x_0) \neq 0 \quad (6)$$

Pochodna funkcji złożonej

Chcąc obliczyć pochodną funkcji $f(x) = 2^{\sin x}$ należy skorzystać z następującego twierdzenia.

Twierdzenie

*Jeżeli funkcja f ma pochodną właściwą w punkcie x_0 i funkcja g ma pochodną właściwą w punkcie $f(x_0)$,
to*

$$\left((g(f(x_0))) \right)' = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Przykład

$$(e^{-x^2})' = (e^{-x^2})(-2x) = -2e^{-x^2}x$$

Pochodna funkcji złożonej: przypadek gdy funkcja wewnętrzna jest liniowa

Z twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej wynika, że:

$$(f(\alpha x + \beta))' = \alpha(f'(\alpha x + \beta)).$$

W szczególności:

$$(e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}.$$

Pochodna funkcji logistycznej

Pochodna funkcji logistycznej

$$f(t) = \frac{a}{1 + be^{-ct}}$$

jest równa

$$f'(t) = \frac{(a)'(1 + be^{-ct}) - a(1 + be^{-ct})'}{(1 + be^{-ct})^2} = \frac{abce^{-ct}}{(1 + be^{-ct})^2}.$$

Dla $a = 40$, $b = 5$ i $c = 0,5$ oraz $x_0 = 5$ otrzymujemy

$$f'(x_0) = \frac{40 \cdot 5 \cdot 0,5 \cdot e^{-0,5 \cdot 5}}{(1 + 5e^{-0,5 \cdot 5})^2} = 4,126329.$$

Pochodna funkcji na przedziale

Definicja (pochodnej funkcji na przedziale otwartym)

Funkcja ma pochodną właściwą na przedziale wtedy i tylko wtedy, gdy ma pochodną właściwą w każdym punkcie tego zbioru. Funkcję określoną na zbiorze, której wartości w punktach x tego zbioru są równe $f'(x)$ nazywamy pochodną funkcji na zbiorze i oznaczamy przez f' .

Pojęcie przedziału w analizie matematycznej

Przez przedział będziemy rozumieć podzbiór prostej będący

- ▶ odcinkiem — postaci $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ lub (a, b) ;
- ▶ półprostą — postaci $[a, \infty)$, (a, ∞) , $(-\infty, b]$ lub $(-\infty, b)$;
- ▶ prostą $\mathbb{R}$.

Pochodna na przedziale nie będącym zbiorem otwartym

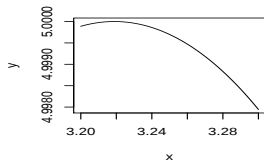
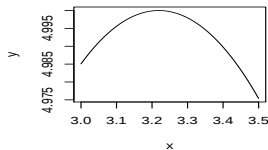
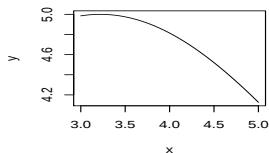
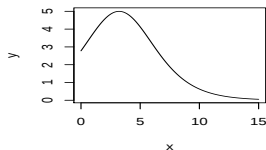
Pochodną funkcji f na przedziale $\mathcal{I} = [a, b]$ (oznaczymy ją przez f') określamy następująco:

$$f'(x) = \begin{cases} f'(x), & x \in (a, b), \\ \text{pochodna prawostronna w } x, & x = a, \\ \text{pochodna lewostronna w } x, & x = b. \end{cases}$$

Analogicznie definiujemy pochodną na innych typach przedziałów, nie będących zbiorami domkniętymi.

Pochodną lewostronną funkcji f w x_0 definiujemy korzystając z pojęcia granicy lewostronnej w x_0 (zamiast pojęcia granicy funkcji w x_0). Analogicznie definiujemy pochodną prawostronną funkcji.

Pochodna funkcji logistycznej — wykresy



Rysunek: Pochodna funkcji $y = f_0(t) = \frac{40}{1+5e^{-0,5t}}$

Punkt przegięcia funkcji logistycznej

Przedstawione wykresy: punkt, w którym „tempo wzrostu funkcji f_0 przestaje rosnać”: w przybliżeniu 3,22.

Problemy:

- ▶ w jaki sposób w sposób bardziej precyzyjny zdefiniować punkt, w którym tempo wzrostu danej funkcji przestaje rosnać (tzw. punkt przegięcia);
- ▶ w jaki sposób znajdować punkt przegięcia funkcji (przy użyciu metod analitycznych, a nie graficznych).

Odpowiedzi: następny wykład.