1. Niech A, B i C będą zdarzeniami zawartymi w przestrzeni $\mathcal{S}$. Zilustrować przy użyciu diagramów Venna następujące stwierdzenia:
   (a) $(A \cap B) \subset A$;
   (b) $A \subset (A \cup B)$;
   (c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
   (d) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
   (e) $(A \cup B)' = A' \cap B'$;
   (f) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

   Uwaga Dla dowolnego zdarzenia C zawartego w przestrzeni zdarzeń elementarnych $\mathcal{S}$ jego dopełnienie, oznaczone przez C', jest określone równością $C' = \mathcal{S} \setminus C$.

2. Niech A, B i C będą zdarzeniami. Zapisać za pomocą działań na zbiorach następujące zdarzenia:
   (a) zachodzi dokładnie jedno ze zdarzeń A, B lub C;
   (b) zachodzą co najmniej dwa spośród zdarzeń A, B i C.

3. Uzasadnić, że dla $n \geqslant 2$

$$(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B).$$

4. Udowodnij, że z aksjomatycznej definicji prawdopodobieństwa, przedstawionej na wykładzie, wynikają następujące własności prawdopodobieństwa:
   (a)
$$P(A) \leqslant P(B) \quad \text{jeżeli} \quad A \subset B;$$
   (b)
$$P(A) + P(A') = 1;$$
   („suma prawdopodobieństw zdarzeń przeciwnych jest równa 1”);
   (c)
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
   (d) Jeżeli przestrzeń zdarzeń elementarnych $\mathcal{S}$ jest skończona i przy tym są określone prawdopodobieństwa p_i poszczególnych zdarzeń jednoelementowych s_i, czyli

$$p_i = P(\{s_i\}), \quad p_i \geqslant 0,$$
$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1,$$

   to prawdopodobieństwo zdarzenia A, któremu sprzyjają zdarzenia elementarne $s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_k}$:

$$A = \{s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_k}\},$$

   jest dane równością

$$P(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_k}.$$

5. Udowodnić następujące twierdzenie: Jeżeli przestrzeń $\mathcal{S}$ składa się z n zdarzeń elementarnych, czyli $n(\mathcal{S}) = n$ (liczbę elementów danego zbioru skończonego A będziemy oznaczać przez $n(A)$) i zdarzenia jednoelementowe $\{s_i\}$ jednakowo prawdopodobne, czyli
$$P(\{s_i\}) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$
to prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia A składającego się z k zdarzeń elementarnych, $n(A) = k$, jest równe
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\mathcal{S})} = \frac{k}{n}.$$

Mariusz Grządziel