# Para zmiennych losowych

dr Mariusz Grządziel

Katedra Matematyki, Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu

rok akademicki 2017/2018 — semestr letni

# Funkcje wielu zmiennych

Przestrzeń dwuwymiarowa, oznaczana w literaturze matematycznej symbolem $\mathbb{R}^2$, może być utożsamiona z parami liczb rzeczywistych:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Przestrzeń n-wymiarowa (oznaczenie: $\mathbb{R}^n$), może być określona jako zbiór n-wymiarowych wektorów:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : \quad x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

# Funkcje wielu zmiennych

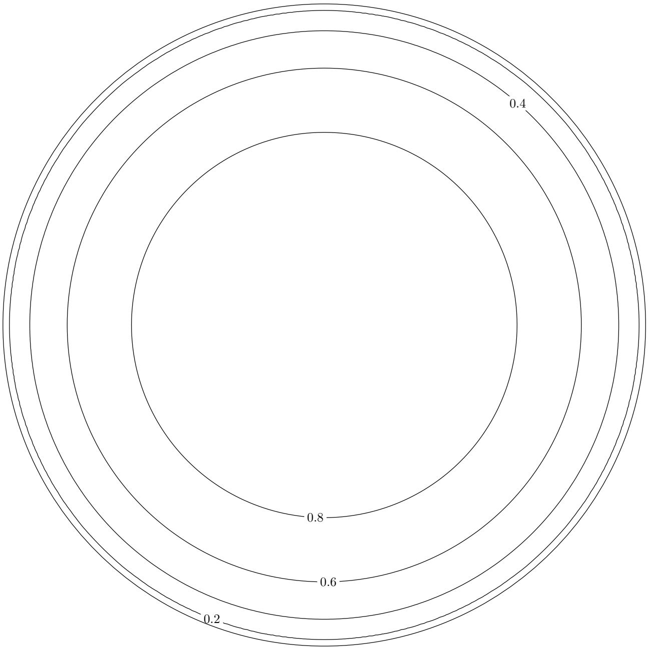
Funkcja przyporządkowująca elementom przestrzeni $\mathbb{R}^n$ liczby rzeczywiste— funkcja $n$ zmiennych.
Dziedziną funkcji $n$ zmiennych może być $\mathbb{R}^n$ lub podzbiór $\mathbb{R}^n$.

# Funkcje wielu zmiennych—przykłady

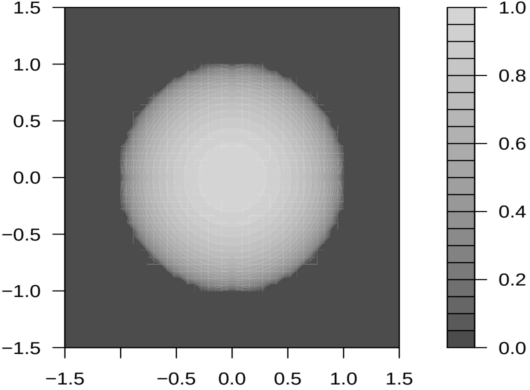
Rozważmy następujące funkcje dwóch zmiennych:

$$
\begin{aligned}
f_1(x, y) &= \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2}, & \text{gdy } x^2 + y^2 \leqslant 1, \\ 0, & \text{gdy } x^2 + y^2 > 1; \end{cases} \\
f_2(x, y) &= |xy|; \\
f_3(x, y) &= x^2 + y^2.
\end{aligned}
$$

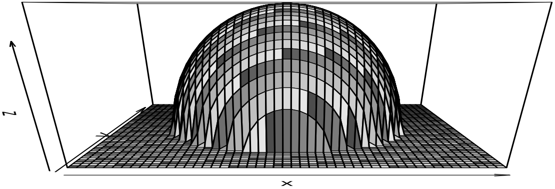
Funkcje dwóch zmiennych można przedstawiać graficznie przy użyciu wykresów konturowych, wypełnionych wykresów konturowych oraz wykresów perspektywicznych.



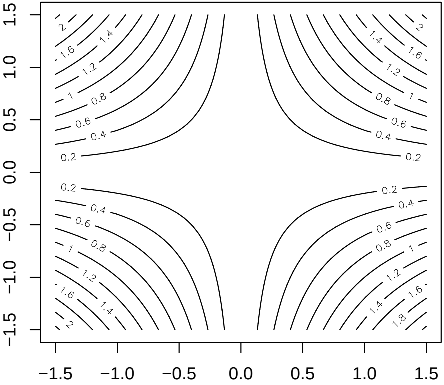

Rysunek: Wykres konturowy dla funkcji $f_1$



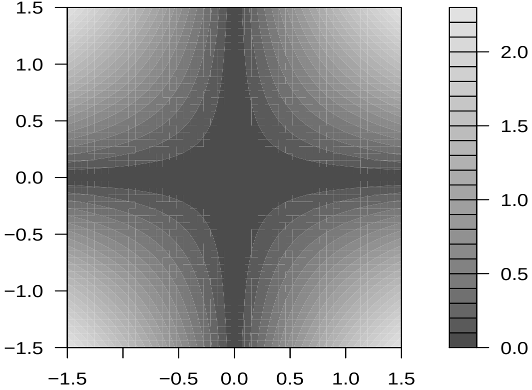

Rysunek: „Wypełniony” wykres konturowy dla funkcji $f_1$



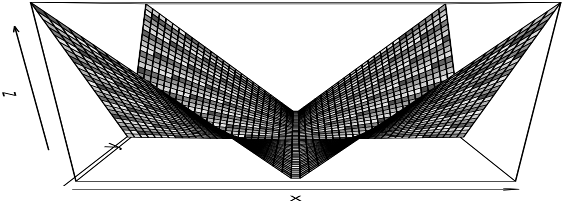

Rysunek: Wykres perspektywiczny funkcji $f_1$



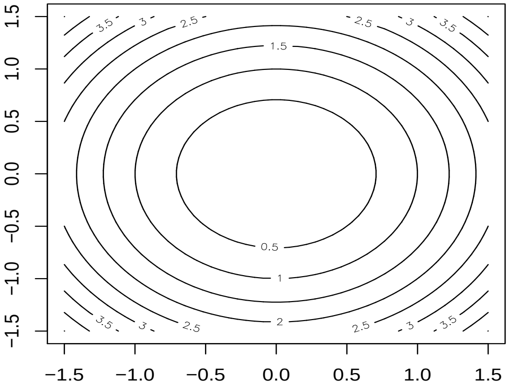

Rysunek: Wykres konturowy funkcji $f_2$



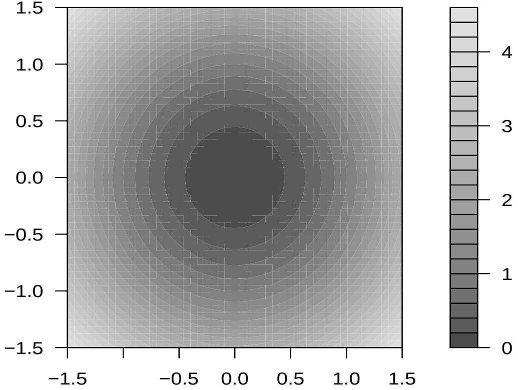

Rysunek: „Wypełniony” wykres konturowy funkcji $f_2$



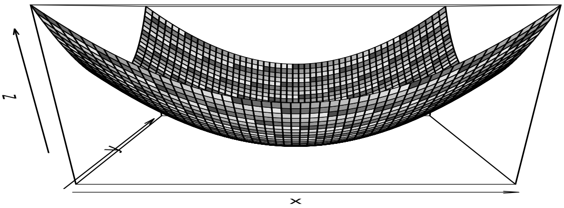

Rysunek: Wykres perspektywiczny funkcji $f_2$



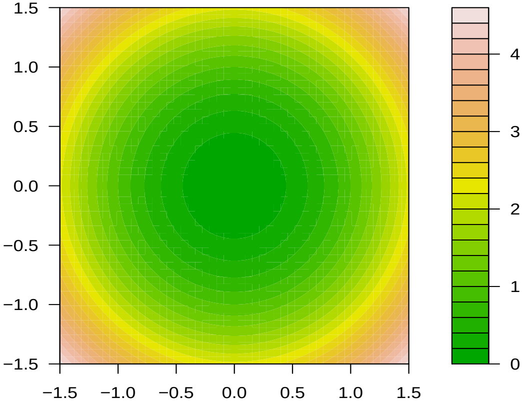

Rysunek: Wykres konturowy funkcji $f_3$




Rysunek: „Wypełniony” wykres konturowy funkcji $f_3$




Rysunek: Wykres perspektywiczny funkcji $f_3$




Rysunek: Wykres perspektywiczny funkcji $f_3$— skala barw „terrain”

# Uwagi o całce dwukrotnej

Pole trapezu krzywoliniowego można wyrazić za pomocą całki oznaczonej.
Objętość figur ograniczonych wykresem funkcji dwóch zmiennych oraz jedną (lub kilkoma) płaszczyznami można obliczyć korzystając z pojęcia całki wielokrotnej. Objętość figury ograniczonej przez wykres funkcji $f_1$ i płaszczyznę $z = 0$ jest równe $\frac{2\pi}{3}$ (połowie objętości kuli o promieniu 1).
Objętość tę można wyrazić jako całkę dwukrotną

$$\iint_P f_1(x, y) dxdy,$$

gdzie $P$ oznacza prostokąt, którego wierzchołkami są punkty $P_1 = (-1, -1), P_2 = (-1, 1), P_3 = (1, 1), P_4 = (1, -1)$.
Więcej informacji a całkach podwójnych i wielokrotnych można znaleźć w książkach [KW11] i [Fich80].

# Zastosowania w teorii prawdopodobieństwa

W teorii prawdopodobieństwa jesteśmy w sposób szczególny zainteresowani funkcjami łącznej gęstości rozkładu pary zmiennych losowych .
Mówimy, że $g$ jest funkcją łącznej gęstości rozkładu pewnej pary zmiennych losowych jeżeli jest ona nieujemna i spełnia warunek:

$$\iint_P g(x, y)\, dx\, dy, \quad \text{gdzie} \quad P = \mathbb{R}^2.$$

**Przykład** Funkcja $\frac{3}{2\pi} f_1(x, y)$ jest funkcją łącznej gęstości pewnej pary zmiennych losowych.

# Dwuwymiarowy rozkład normalny

Para zmiennych losowych $X$ i $Y$ ma dwuwymiarowy rozkład normalny z parametrami $\mu_X, \mu_Y \in \mathbb{R}$, $\sigma_X > 0$, $\sigma_Y > 0$ oraz $\rho \in (-1, 1)$, jeżeli łączna gęstość (dla tej pary) ma postać

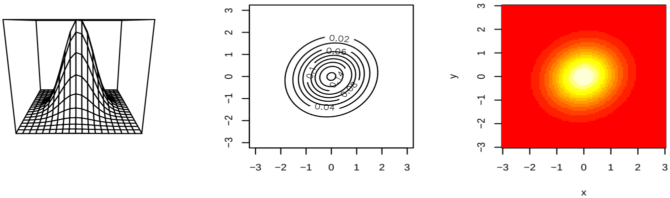
$$f(x, y) = \frac{e^{-q/2}}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}},$$

gdzie $x, y \in \mathbb{R}$,

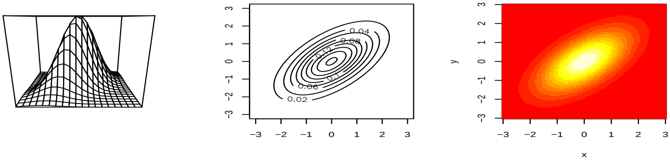
$$q = \frac{1}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{x-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) + \left(\frac{x-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]$$

Zapis skrócony: $N(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y, \rho)$.

# Gęstość rozkładu $N(0, 0, 1, 1, 0.1)$

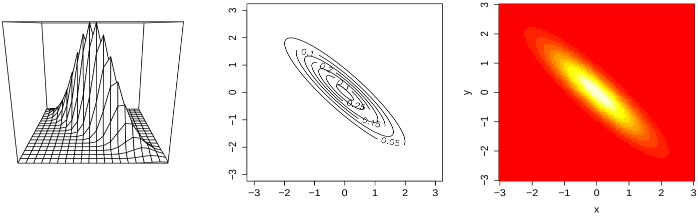


# Gęstość rozkładu $N(0, 0, 1, 1, 0.6)$



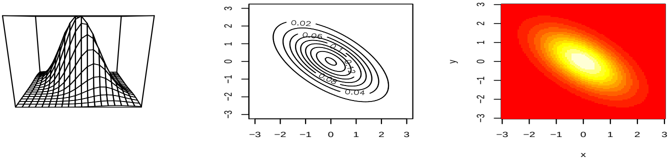

Rysunek: Gęstość rozkładu $N(0, 0, 0, 0, 0.6)$

# Gęstość rozkładu $N(0, 0, 1, 1, -0.9)$




Rysunek: Wykresy gęstości rozkładu $N(0, 0, 0, 0, -0.9)$

# Gęstość rozkładu $N(0, 0, 1, 1, -0.6)$




Rysunek: Gęstość rozkładu $N(0, 0, 0, 0, -0.6)$

# Polecana literatura

[Bed04] T. Bednarski, Elementy matematyki w naukach ekonomicznych. Oficyna Ekonomiczna, Kraków 2004.
[Fich80] G. Fichtenholz, Rachunek Różniczkowy i całkowy, t.3, rozdz. XVI, PWN 1980.
[KW11] W. Krysicki, L. Włodarski, Analiza matematyczna w zadaniach, część II, rozdz. 1, PWN 2011.