Rachunek prawdopodobieństwa: rys historyczny, aksjomatyka, prawdopodobieństwo warunkowe, niezależność zdarzeń

dr Mariusz Grządziel

Katedra Matematyki, Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu

Semestr letni 2017/2018

Rys historyczny

- G. Cardano (1501-1575):
  „Liber de Ludo Aleae” („Księga gier losowych”);
- Christian Huygens, „De ratiociniis in ludo aleae” („O rozumowaniu (obliczeniach) w grach losowych”) — 1657; książka G. Cardano wydana dopiero po opublikowaniu pracy Huygensa;
- G. Cantor (1845-1916): podstawy teorii zbiorów (teorii mnogości): 2 połowa XIX wieku;
- aksjomatyczne ujęcie teorii zbiorów: 1908-1930; zbiór „podstawowym pojęciem” - „podstawowym bytem matematycznym”;
- aksjomatyczne ujęcie rachunku prawdopodobieństwa: A. Kołmogorow (1933).

Doświadczenie losowe

Doświadczenie nazywamy losowym, jeśli:

- może być powtarzane (w zasadzie) w tych samych warunkach;
- wynik jego nie może być przewidziany w sposób pewny;
- zbiór wszystkich możliwych wyników doświadczenia jest określony przed przeprowadzeniem doświadczenia.

Przykłady doświadczeń losowych

- Jesteśmy zainteresowani cenami mieszkań w mieście M. Pojedyncze doświadczenie polegałoby na znalezieniu ceny (ofertowej) mieszkania w tym mieście i zanotowaniu jej. Powtarzanie doświadczenia polegałoby na przeglądnięciu ofert dotyczących cen mieszkań, w odpowiednich serwisach internetowych, oraz zanotowaniu cen interesujących nas mieszkań.
- Jesteśmy zainteresowani liczbą jajek składanych przez ptaki (powiedzmy jerzyki). Pojedyncze doświadczenie polegałoby na zaobserwowaniu liczby jajek w zaobserwowanym gnieździe. Powtarzanie doświadczenia polegałoby na znajdowaniu gniazd jerzyków i notowaniu liczby jajek.

Przestrzeń zdarzeń elementarnych

Definicja 1

Przestrzenią zdarzeń elementarnych nazywamy zbiór wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego. Pojedynczy element tej przestrzeni nazywać będziemy zdarzeniem elementarnym.

Uwaga Przestrzeń zdarzeń elementarnych będziemy oznaczać symbolem $\mathcal{S}$. W wielu podręcznikach przestrzeń zdarzeń elementarnych oznaczana jest symbolem Ω.
Dowolny podzbiór skończonej lub przeliczalnej przestrzeni zdarzeń elementarnych będziemy nazywać zdarzeniem.
Uwaga Zbiór nazywamy przeliczalnym, jeżeli wszystkie jego elementy można ustawić w ciąg („ponumerować”).

Przestrzeń zdarzeń elementarnych – c.d.

W przypadku przestrzeni zdarzeń elementarnych, która nie jest przeliczalna, wyróżniamy pewną klasę $\mathcal{F}$ jej podzbiorów, zwaną σ-ciałem zdarzeń, i tylko elementy tej klasy nazywamy zdarzeniami, por. książkę W. Krysickiego i in. [Kry99], str. 16.

Pojęcie przestrzeni probabilistycznej

Z dowolnym doświadczeniem kojarzyliśmy:

- przestrzeń zdarzeń elementarnych $\mathcal{S}$;
- zbiór zdarzeń $\mathcal{F}$;
- prawdopodobieństwo P (funkcję określoną na zdarzeniach – elementach $\mathcal{F}$).

Przestrzeń probabilistyczna: trójka $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, P)$.

Przestrzeń zdarzeń elementarnych- przykłady

Przestrzenią zdarzeń elementarnych dla doświadczenia losowego :

- polegającego na losowym wyborze mieszkania, oferowanego do sprzedaży, i podaniu jego ceny jest $[0, \infty)$;
- polegającego na dwukrotnym rzucie monetą jest $\{OO, OR, RO, RR\}$; zapis OO oznacza: orzeł wypadł w pierwszym i drugim rzucie itd.;
- polegającego na dwukrotnym rzucie kostką jest $\{(1, 1), (1, 2), \ldots, (6, 5), (6, 6)\}$.

Czym jest prawdopodobieństwo

Podejście częstościowe: rzucając monetą (uczciwą) N razy otrzymujemy n orłów— można oczekiwać, że n/N będzie dążyć do $1/2$ gdy $N \to \infty$
Podejście aksjomatyczne: każdemu zdarzeniu A, będącemu podzbiorowi przestrzeni zdarzeń elementarnych $\mathcal{S}$ przyporządkowujemy liczbę $P(A)$, spełniającą warunki:

- $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;
- gdy $A = \emptyset$, $P(A) = 0$;
- gdy $A = \mathcal{S}$, $P(A) = 1$;
- Jeśli zdarzenia $A_1, A_2, A_3, \ldots$ się wzajemnie wykluczają (tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$) i suma $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$ jest zdarzeniem, to

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots .$$

Prawdopodobieństwo— przykład

Rzucamy dwukrotnie kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma oczek będzie mniejsza lub równa 3.
W naszym przypadku $\mathcal{S} = \{(1,1),(1,2),\ldots,(6,5),(6,6)\}$; przyjmujemy, że prawdopodobieństwo wszystkich zdarzeń elementarnych jest równe $\frac{1}{6\times 6} = \frac{1}{36}$. Zdarzenie A, odpowiadające wyrzuceniu nie więcej niż 3 oczek, ma postać: $A = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$.
Stąd $P(A) = 3 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{12}$.

Założenie o jednakowym prawdopodobieństwie zdarzeń elementarnych

Uwaga. Z formalnego punktu widzenia moglibyśmy przyjąć w rozważanym przykładzie np.

$$P((1,1)) = P((1,2)) = \frac{1}{2}, \quad P((1,3)) = P((1,4)) = \ldots = P((6,6)) = 0,$$

lecz otrzymany w ten sposób model matematyczny nie będzie „sensownie” opisywał naszego doświadczenia losowego.

Przestrzenie probabilistyczne, w których zdarzenia elementarne nie są jednakowo prawdopodobne

Stwierdzenie 1

Rozważmy przestrzeń $\mathcal{S}$ z k elementami

$$\mathcal{S} = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}.$$

Przy założeniu, że prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia elementarnego s_i jest równe $P(s_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, dla dowolnego zdarzenia $A \subset \mathcal{S}$

$$P(A) = \sum_{s_i \in A} P(s_i).$$

Powyższe stwierdzenie może być uogólnione na przypadek nieskończonych przestrzeni zdarzeń elementarnych, których elementy można ustawić w ciąg.

Przykład 1

Rozważmy doświadczenie losowe polegające na rzucaniu monetą aż do wypadnięcia orła (po raz pierwszy). Intuicja podpowiada przyjęcie, że prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że liczba rzutów jest równa k *wynosi* $\frac{1}{2^k}$*, czyli* $P(O) = \frac{1}{2}$, $P(RO) = \frac{1}{4}$ *itd. Tak więc, na przykład, prawdopodobieństwo otrzymania orła nie później niż w drugim rzucie byłoby równe* $P(O) + P(RO) = \frac{3}{4}$.

Przykład

Prawdopodobieństwo otrzymania 5-tki w grze w Lotto wynosi

$$\frac{\binom{6}{5} \times \binom{49-6}{6-5}}{\binom{49}{6}}$$

- por. hasło *kombinacja bez powtórzeń* w Wikipedii oraz uwagi o „liczbie kombinacji k obiektów spośród n obiektów” w książce Koronackiego i Mielniczuka w rodz. 2.1.2.

Przykład

Wiadomo o pewnym koszykarzu, że wykonując rzut osobisty trafia do kosza z prawdopodobieństwem 0,9. Chcemy obliczyć prawdopodobieństwo, że rzucając 3 razy trafi do kosza dokładnie 2 razy. Zakładamy, że wyniki kolejnych rzutów nie zależą od siebie.

Rozwiązanie.

$$3 \times 0{,}9^2 \times 0{,}1 = \binom{3}{2} \times 0{,}9^2 \times 0{,}1.$$

$\binom{3}{2}$ — liczba sekwencji zero-jedynkowych o długości trzy, w których występują dwie jedynki = liczbie kombinacji 2 obiektów spośród 3 obiektów (lub liczbie kombinacji dwuelementowych zbioru 3- elementowego - według terminologii przyjętej przez autora artykułu w Wikipedii o kombinacjach bez powtórzeń).

Przykład

Wiadomo o pewnym koszykarzu, że wykonując rzut osobisty trafia do kosza z prawdopodobieństwem $p \in (0, 1)$. Chcemy obliczyć prawdopodobieństwo, że rzucając n razy trafi do kosza dokładnie k razy, gdzie n jest liczbą naturalną i $0 \leqslant k \leqslant n$. Zakładamy, że wyniki kolejnych rzutów nie zależą od siebie.

Rozwiązanie.

$$\binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

Prawdopodobieństwo warunkowe — „przykład wprowadzający”

Rzucamy kostką „uczciwą”; $\mathcal{S} = \{s_1, \ldots, s_6\}$,

$$P(s_i) = \frac{1}{6}, \quad i = 1, \ldots, 6$$

Dla $A \subset \mathcal{S}$

$$P(A) = \frac{\#\{s_i \in A\}}{\#\{s_i \in \mathcal{S}\}},$$

gdzie dla dowolnego skończonego zbioru A symbol $\#A$ oznacza liczność zbioru A.

Dodatkowe założenie Jedyne możliwe wyniki są liczbami podzielnymi przez 3.

Niech $B = \{s_3, s_6\}$. Przyjmijmy, że mamy do czynienia z nową przestrzenią zdarzeń elementarnych $\mathcal{S}_1 = B$.

Oznaczenie Prawdopodobieństwo zdarzenia A w przestrzeni $\mathcal{S}_1$ będziemy oznaczać przez $P(A|B)$.

Prawdopodobieństwo warunkowe — „przykład wprowadzający”, c.d.

Na ogół $P(A)$ nie jest równe $P(A|B)$; np.
Dla $A = \{s_3\}$

$$P(A) = \frac{1}{6} \quad \text{i} \quad P(A|B) = \frac{\#\{s_i \in A \cap B\}}{\#\{s_i \in B\}} = \frac{1}{2},$$

Dla $A = \{s_1\}$

$$P(A) = \frac{1}{6} \quad \text{i} \quad P(A|B) = \frac{\#\{s_i \in A \cap B\}}{\#\{s_i \in B\}} = 0.$$

Obserwacja W obu przypadkach $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Definicja 2

Dla $A, B \in \mathcal{S}$ *i* $P(B) > 0$ *przyjmujemy* $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Prawdopodobieństwo całkowite

Twierdzenie 1

Niech zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_n$ spełniają warunki:

- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \mathcal{S}$;
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ *dla* $i \neq j$;
- $P(A_i) > 0$ *dla* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Wtedy dla każdego zdarzenia $A \in \mathcal{S}$ *ma miejsce następujący wzór na prawdopodobieństwo całkowite:*

$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + \ldots + P(A_n)P(A|A_n).$$

Twierdzenie Bayesa

Twierdzenie 2

Twierdzenie Bayesa
Przy założeniach Twierdzenia 1

$$P(A_i|A) = \frac{P(A|A_i)P(A_i)}{P(A|A_1)P(A_1) + \ldots + P(A|A_n)P(A_n)}$$

dla $i = 1, \ldots, n$.
dowód Należy skorzystać z równości
$P(A_i|A)P(A) = P(A_i \cap A) = P(A|A_i)P(A_i)$

Przykład

Prawdopodobieństwo awarii w ciągu roku zespołu napędowego samochodu marki X wynosi

- $0,02$ przy stosowaniu oleju marki A;
- $0,03$ przy stosowaniu oleju marki B.

Wiadomo, że spośród kierowców jeżdżących samochodami marki X

- 80% używa oleju marki A;
- 20% używa oleju marki B.

Jakie jest prawdopodobieństwo awarii zespołu napędowego (w ciągu roku) losowo wybranego samochodu marki X?

Przykład – c.d.

Rozwiązanie Oznaczmy:
A_1: kierowca stosuje olej marki A;
A_2: kierowca stosuje olej marki B;
A - zespół napędowy ulega awarii w ciągu roku. Korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite otrzymujemy:

$$P(A) = P(A|A_1)P(A_1) + P(A|A_2)P(A_2) =$$
$$= 0{,}02 \cdot 0{,}8 + 0{,}03 \cdot 0{,}2 = 0{,}022.$$

Prawdopodobieństwo, że losowo wybrany pojazd spośród samochodów, których zespól napędowy uległ awarii w danym roku, jest marki A można obliczyć korzystając z twierdzenia Bayesa:

$$P(A_1|A) = \frac{0{,}02 \cdot 0{,}8}{0{,}02 \cdot 0{,}8 + 0{,}03 \cdot 0{,}2} \approx 0{,}73.$$

Niezależność zdarzeń

Niezależność zdarzeń wiążemy z brakiem zależności przyczynowo- skutkowej.
Można uznać za niezależne:

- wyniki kolejnych rzutów kostką;
- ustanowienie rekordu świata w skoku w dal na najbliższej olimpiadzie i utworzenie nowego województwa do końca bieżącego roku

Definicja 3

Mówimy, że zdarzenia A i B są niezależne, jeżeli

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Niezależność dla więcej niż dwóch zdarzeń— patrz [KM01],Definicja 2.7.
Uwaga Jeżeli A i B są niezależne i $P(B) > 0$, to

$$P(A|B) = P(A).$$

Niezależność zdarzeń— przykłady

W przykładzie z rzutem dwoma kostkami:
zdarzenie A— „wynik pierwszego rzutu jest równy jeden" i
zdarzenie B—„wynik drugiego rzutu jest równy 5"
są niezależne, gdyż

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{6} \text{ oraz } P(A \cap B) = P((1,5)) = \frac{1}{36}.$$

Lektura uzupełniająca

[GK00] Gajek, L., Kałuszka, M., Wnioskowanie matematyczne, modele i metody. WNT 2000.
[KM01] Koronacki, J., Mielniczuk, J. Statystyka dla studentów kierunków technicznych i przyrodniczych. WNT. Warszawa 2001, podrozdział 2.1.2, str. 62-79.
[Kry99] Krysicki, W., Bartos, J., Dyczka, W., Królikowska, K. i Wasilewski, M., Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach, Cz. 1, Rachunek prawdopodobieństwa, PWN 1999.