ANALIZA MATEMATYCZNA

1. Podaj wzór na a_n dla ciągów

$$a)1,0,1,0,\ldots \qquad b)2,-4,8,-16,32,\ldots$$

$$c)1,\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7},\ldots \qquad d)1,2,3,5,7,11,\ldots$$

2. Oblicz a_3, a_5, a_{k+1} wiedząc, że

$$a)\quad a_n = \frac{1}{n^2+n}, \quad b)\quad a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}, \quad \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 1+2a_n \end{cases}$$

3. Zbadaj monotoniczność i ograniczoność ciągów

$$a)\ \mathrm{a}_n = \cos\frac{1}{n}, \quad b_n = \frac{1+3+\ldots+(2n-1)}{n^2+1}, \quad \mathrm{c}) = \begin{cases} \mathrm{c}_1 = \sqrt{2} \\ c_{n+1} = \sqrt{2+c_n} \end{cases}$$

4. Udowodnij z definicji granicy ciągu, że

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-2} = \frac{2}{3}, \quad \mathrm{b})\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{1-n} = -2, \quad \mathrm{c})\ \lim_{n\to\infty}\frac{1-p\cdot n}{n} = -p$$

5. Wykaż, że ciągi

$$a)\ a_n = 2+(-1)^n \quad \mathrm{b})\ a_n = \sin\frac{n\cdot p}{2} \quad \text{nie posiadają granicy.}$$

Podaj własny przykład ciągu, który nie posiada granicy.

6. Udowodnij, że ciąg zbieżny nie może posiadać dwóch różnych granic.

7. Oblicz granice ciągów o podanych wyrazach ogólnych

$$a)\ \frac{n+\sqrt{3n^2-1}}{1-n}, \quad \mathrm{b})\ \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^n+3^{n+1}} \quad \mathrm{c})\ \frac{1+2+\ldots+n}{1-n^2} \quad \mathrm{d})\ n-\sqrt{n^2+n}$$

$$\mathrm{e})\ \frac{n}{\sqrt{4n^2+n}-2n}, \quad \mathrm{f})\ \sqrt[3]{n^3+4n^2}-n \quad \mathrm{g})\ \frac{9^{\log_3 n}}{4^{\log_2 n}}, \quad \mathrm{h})\ \frac{5\cdot 3^{2n}-1}{4\cdot 9^n+7}$$

8. Podaj przykład kilku ciągów, które posiadają następujące granice.

$$\mathrm{a})\ g = 3, \quad \mathrm{b})\ g = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \mathrm{c})\ g = p^2$$