

## ANALIZA MATEMATYCZNA - SZEREGI

### 1. Dla każdego szeregu

- wyznaczyć ciąg sum częściowych  $S_n$
- zbadać jego zbieżność i podać sumę szeregu  $S$  (jeżeli istnieje).

$$a) \frac{7+3}{10} + \frac{7^2+3^2}{10^2} + \frac{7^3+3^3}{10^3} + \dots; \quad b) \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$$

$$c) \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots; \quad d) \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} + \dots; \quad e) \ln 2 + \ln \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \dots$$

### 2. Korzystając z kryterium porównawczego zbadaj zbieżność szeregów

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}; \quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}; \quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 4n}}; \quad \sum_5^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 - 4}}$$

### 3. Korzystając z kryterium $\alpha'$ Alamberta zbadaj zbieżność szeregów

$$\sum \frac{(n!)^3}{(2n)!}; \quad \sum \frac{n!}{n^n}; \quad \sum \frac{2^n}{n^2}; \quad \sum \frac{(n+1)!}{2^n \cdot n!}$$

### 4. Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadaj zbieżność szeregów

$$\sum \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n; \quad \sum \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}; \quad \sum n \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

### 5. Wykorzystując jedno ze znanych kryterium zbieżności zbadaj zbieżność szeregów

$$\sum \frac{\sin 3^n}{3^n}; \quad \sum \frac{2^n n!}{n^n}; \quad \sum \cos \frac{1}{n}; \quad \sum \frac{1}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}; \quad \sum 2^n \sin \frac{\pi}{3^n};$$

$$\sum \frac{3^{3n}}{2^{5n+2}}; \quad \sum \frac{(\arctg n)^n}{2^n}; \quad \sum \pi^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}; \quad \sum \frac{n}{\sqrt{n^4 + 2n^2 + 1}}; \quad \sum \frac{\pi^n}{n} n!; \quad \sum \frac{2^n + 5^n}{5^n + 7^n}$$

### 6. Udowodnij, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 = 0$ ; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0$ ; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{7^n} = 0$

### 7. Zbadaj zbieżność i zbieżność bezwzględną

$$\sum (-1)^{n+1} \frac{n}{2n^2 + 1}; \quad \sum (-1)^n \frac{n-1}{n^2 + 5}; \quad \sum (-1)^n \frac{n}{n^3 + 1};$$

### 8. Wyznacz promień i przedział zbieżności

$$\sum \frac{x^n}{2^n \sqrt{n}} \quad \sum \frac{(-1)^n x^n}{n \cdot 3^n} \quad \sum \frac{n}{2^n + 1} x^n$$