

ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA 6

1. Korzystając z definicji zbadać czy istnieje pochodna podanych funkcji w $x_0 = 0$

$$a) f(x) = x \cdot |x|, \quad b) f(x) = e^{|x|}, \quad c) f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

2. Korzystając z reguł różniczkowania obliczyć pochodne

$$\begin{aligned} y &= \left(x^3 + \frac{1}{x}\right) \cdot e^x & y &= \sqrt[3]{\arcsin(x^2)} & y &= x \cdot 2^{\sqrt{x}} \\ y &= x^{\lg x} & y &= \sin(x + x^x) & y &= e^{2x} \arctg \sqrt[3]{x} \end{aligned}$$

3. Napisać równania stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach

$$\begin{aligned} a) y &= \ln(x^2 + e) \text{ w } x_0 = 0, & b) y &= \frac{e^x}{x+1} \text{ w } x_0 = 1 \\ c) y &= \frac{\ln x}{x} \text{ w } x_0 = e, & d) f(x) &= \sqrt{2^x + 1} \text{ w } x_0 = 3 \end{aligned}$$

4. Znaleźć parametry a i b tak aby funkcje

$$a) f(x) = \begin{cases} a \cdot e^x + b & \text{dla } x \leq 0 \\ 2 - x & \text{dla } x > 0 \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{dla } x \leq 0 \\ a \sin x + b \cos x & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

były ciągłe i różniczkowalne na R .

5. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżone wartości podanych wyrażeń

$$a) \sqrt[3]{7.999} \quad b) \frac{1}{\sqrt{3.98}} \quad c) \arcsin 0.51$$

6. Znaleźć wzory ogólne na pochodną n -tego rzędu

$$a) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad b) f(x) = \sin^2 x \quad c) f(x) = x e^x$$

7. Znaleźć przedziały monotoniczności funkcji

$$a) f(x) = e^x (x + 1) \quad b) y = x \ln^2 x \quad c) y = x^4 e^{-3x}$$

8. Wyznaczyć ekstrema funkcji

$$a) f(x) = 4x + \frac{1}{x} \quad b) f(x) = \frac{1}{x \ln x} \quad c) y = \frac{x^3}{3 - x^2}$$

9. Obliczyć granice korzystając z reguły de l'Hospitala

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^x + 1)}{x} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \right) \quad c) \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x)^{\ln x}$$
$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{\sin 2x} \quad e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 6x}{\arcsin 3x} \quad f) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x} \right)$$

10. Określić przedziały wypukłości oraz punkty przecięcia funkcji

$$a) f(x) = xe^{-x} \quad b) f(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad c) f(x) = \ln(1 + x^2)$$

11. Zbadać przebieg zmienności funkcji i sporządzić wykres

$$a) f(x) = x \ln x \quad b) y = x^2 e^{-x} \quad c) y = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$$

12. W półkule o promieniu $R=2$ wpisano walec o największej objętości. Znaleźć wymiary tego walca.

13. Lejek ma kształt stożka o tworzącej $l=10$ cm. Jakie wymiary powinien mieć lejek aby jego objętość była maksymalna ?

14. Jakiej wielkości kwadraty należy wyciąć na rogach prostokątnego arkusza kartonu o wymiarach $a = 30$ cm, $b = 24$ cm, aby pojemność pudełka otrzymanego po sklejeniu kwadratu była największa ?

Powodzenia

Dr Z. Jurzyk