

ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA 8

1. a) wykazać, że dla dowolnej ciągłej funkcji $y=f(x)$ zachodzi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right] = \int_0^1 f(x) dx$$

- b) oblicz granice

$$\text{i) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p}{n} \cdot \left[\sin \frac{p}{n} + \sin \frac{2p}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)p}{n} \right]$$

$$\text{ii) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{4 - \left(\frac{1}{n}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{4 - \left(\frac{2}{n}\right)^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4 - \left(\frac{n}{n}\right)^2}} \right]$$

2. Oblicz z definicji całkę $\int_0^1 x dx$

3. Oblicz korzystając z interpretacji geometrycznej całki oznaczonej

$$\text{a) } \int_1^2 (2x+1) dx \quad \text{b) } \int_0^5 \sqrt{25-x^2} dx$$

4. Obliczyć całki

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx; \quad \text{b) } \int_0^{\frac{p^2}{4}} \sin \sqrt{x} dx; \quad \text{c) } \int_{\frac{1}{p}}^{\frac{2}{p}} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx; \quad \text{d) } \int_0^2 |1-x| dx;$$

$$\text{e) } \int_0^p \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} dx; \quad \text{f) } \int_0^2 f(x) dx, \text{ gdzie } f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x} & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

5. Oblicz pole figury ograniczonej krzywymi

$$\text{a) } y=x^2+1, x+y=3 \quad \text{b) } y=2x-x^2, x+y=0 \quad \text{c) } y=2^x, y=2x-x^2, x=0, x=2, \quad \text{d) } , x+y=1, \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$$

6. Naskicuj krzywe zadane w postaci parametrycznej i oblicz pole obszaru nimi ograniczonego

$$\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 2t^2 - t^3 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2 \quad \begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t^2 \end{cases} \quad -1 \leq t \leq 1$$

7. Wyprowadź wzory na pole koła i elipsy