

CAŁKI OZNACZONE- ZASTOSOWANIE

1. Korzystając z definicji całki oznaczonej obliczyć poniższe granice:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4}{n^5}$
b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \dots + \frac{1}{2n+n} \right)$
c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}} \right)$

2. Wykorzystując interpretację geometryczną całki oznaczonej obliczyć:

- a) $\int_{-1}^2 |x| dx$
b) $\int_0^2 [x] dx$ gdzie $[x]$ - część całkowita liczby x
c) $\int_{-1}^3 \text{sgn}(x) dx$

3. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi

- a) $y = 1 - x^2$, $x + y = -1$
b) $y = x^2$, $y = 2x - x^2$, $y = 0$
c) $y = 3 - x^2$, $y = -1$
d) $y = \ln x$, $y = -1$, $x = e$
e) $y^2 = x$, $x + y = 2$
f) $y^2 = x$, $y^2 = 4x$, $x = 1$
g) $y = \frac{2}{1+x^2}$, $y = x^2$

4. Narysować krzywe podane w układzie biegunowym, a następnie obliczyć pole obszaru ograniczonego tymi krzywymi

- a) $r = 3\cos 2\varphi$
b) $r = 1 + \sin\varphi$
c) $r = 2\varphi$ gdzie $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

5. Obliczyć długość łuku podanych krzywych

- a) $y = \sqrt{1-x^2}$ $x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$
b) $y = e^x$ $x \in \langle 0, 1 \rangle$

6. Obliczyć objętość brył powstałych z obrotu podanych łuków wokół wskazanych osi

- a) $y = \sqrt{x} + 1$ $0 \leq x \leq 1$ OX
b) $y = \text{tg} x$ $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ OX
c) $y = \ln x$ $1 \leq x \leq e$ OY
d) $y = x^2 - 4$ $1 \leq x \leq 2$ OY
e) $y = \sin x$ $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ OY

7. Obliczyć objętość brył powstałych z obrotu podanych obszarów wokół wskazanych osi

a) $y = 2x - x^2, y = 0$ OX

b) $y = x^2, y = 0, x = 1, x = 2$ OY

c) $y = x^2, x + y = 2, y = 0$ OX

d) *ten sam obszar względem osi* OY

e) $y = \sin x, y = 0, x \in \langle 0, \pi \rangle$ OY

8. Obliczyć pole powierzchni powstałej z obrotu funkcji

a) $y = \sqrt{x} \quad 0 \leq x \leq 4$ względem osi OX

b) $y = x^3 \quad 0 \leq x \leq 1$ względem osi OX

9. Wyprowadzić wzory na objętość brył obrotowych (walec, stożek, kula) a także wzory na ich pola powierzchni bocznych.