CIĄGI LICZBOWE

1. Dane są ciągi liczbowe:

a) $(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots)$ b) $(10, 7, 4, 1, \dots)$ c) $(2, 4, 2, 4, 2, \dots)$ d) $(1, 1, 2, 6, 24, \dots)$

e) $(1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, \dots)$

Dla każdego ciągu wyznacz a_{10} oraz a_n.

2. Dla poniższych ciągów

a) $a_n = \frac{2^n}{(n-1)!}$ b) $a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$ c) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 2\cdot 10^{n-1} \end{cases}$

Podać a_1, a_3, a_{2k-1}.

3. Zbadać monotoniczność ciągów

a) $a_n = \frac{2n}{n+1}$ b) $a_n = \frac{n+1}{n!}$ c) $a_n = log\frac{n+1}{n}$

d) zbadać monotoniczność ciągów z zadania 2.

4. Zbadać ograniczoność ciągów

a) $a_n = \frac{n^2}{n^2+1}$ b) $a_n = \frac{n+1}{n!}$ c) $a_n = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+2} + \frac{1}{2^3+3} + \dots + \frac{1}{2^n+n}$

d) $a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$ e) $a_n = \sqrt{n^2+1} - n$

5. Uzasadnić, że poniższe ciągi są zbieżne

a) $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ b) $a_n = \frac{1}{3^1+1!} + \frac{1}{3^2+2!} + \dots + \frac{1}{3^n+n!}$

6. Dany jest ciąg liczbowy $a_n = \frac{n}{n+1}$. Wyznaczyć dla zadanego ε >0 taką liczbę naturalną N=N(ε), że $|a_n - 1| < \varepsilon$ dla każdego n> N. Uzupełnić poniższą tabelkę.

ε	0,1	0,01	0,03	0,002
N				

Udowodnić z definicji granicy ciągu, że $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

7. Udowodnić z definicji granicy ciągu, że

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{1-n} = -2$ b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1-n^2}{1+n^2} = -1$

8. Uzasadnić, że ciąg $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$ nie posiada granicy.

9. Obliczyć granice ciągów

a) $a_n = \frac{\sqrt{n}+2}{3n-3}$ b) $b_n = \frac{2n^2+n\sqrt{n^2+1}}{1-3n^2}$ c) $c_n = \frac{1+2+2^2+\cdots.+2^n}{1+3+3^2+\cdots+3^n}$

d) $d_n = \sqrt{n^2+4n} - \sqrt{n^2+4n+5}$ e) $e_n = \frac{2n^2+3(-1)^n}{n^2+1}$ f) $f_n = \frac{1+2+3+\cdots+n}{2n^2+n+1}$

g) $g_n = \frac{2^{n+2}+3^{n+1}}{3^n-2^n}$ h) $h_n = \sqrt[n]{2^n+3^{-n}+1}$ i) $i_n = \sqrt[n]{3\cdot 5^n + 2\cdot 7^n}$

j) $j_n = \sqrt[n]{1^2+2^3+\ldots+ n^2}$ k) $k_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$ l) $l_n = \sqrt{5^n+4^n} - \sqrt{5^n+1}$

m) $t_n = \frac{n^3}{(n+3)!}$ n) $p_n = \frac{3n!+n^2}{(n+2)!+2}$ o) $x_n = (1+\frac{2}{n+3})^{1-3n}$ p) $y_n = (\frac{2n+1}{2n+3})^{3n-1}$

r) $z_n = nln\frac{n+2}{n}$ s) $r_n = \sqrt[n]{2n^2+n+1}$

ZADANIA DODATKOWE

1. Wykazać, że ciąg $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ jest ograniczony i monotoniczny

2. Obliczyć granice ciągów

a) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

b) $b_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

3. Wykazać z definicji granicy ciągu, że $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$