

Zadania z analizy matematycznej dla I r. GiK.

Lista 4. Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej.

1. Obliczyć podane całki nieoznaczone.

a. $\int (4x^3 - 6x^2 + 5x - 11) dx$

e. $\int 3^x 2^{2x} 5^{3x} dx$

b. $\int (6 - x)\sqrt{x} dx$

f. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx$

c. $\int (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^2 dx$

g. $\int \frac{2-x^2}{1+x^2} dx$

d. $\int (2\sin x + 3\cos x + 2^{x+1} - e^2) dx$

h. $\int t g^2 x dx$

2. Stosując odpowiednie podstawienie obliczyć podane całki nieoznaczone.

a. $\int \sin(7x - 6) dx$ f. $\int x \cos(x^2) dx$ k. $\int \frac{x}{21+3x^2} dx$

b. $\int (1 - 2x)^{112} dx$ g. $\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx$ l. $\int \frac{2x^3}{\sqrt[4]{1+x^4}} dx$

c. $\int x \sqrt{1 - 3x^2} dx$ h. $\int \frac{dx}{4+3x^2}$ m. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3-\cos^4 x}} dx$

d. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$ i. $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$ (wsk. $\cos^2 x = t$)

e. $\int x^2 e^{-5x^3} dx$ j. $\int \sin x * \cos x dx$

3. Stosując wzór na całkowanie przez części obliczyć całki.

a. $\int x \ln x dx$ f. $\int \ln x dx$ k. $\int (x^3 + 8) \cos x dx$

b. $\int x^2 \sin x dx$ g. $\int x \frac{1}{\cos^2 x} dx$ l. $\int x^7 \ln x dx$

c. $\int x^2 e^{-x} dx$ h. $\int \arctg x dx$ m. $\int (x + 1) e^x dx$

d. $\int 2x \arctg x dx$ i. $\int \sin^2 x dx$

e. $\int e^x \cos x dx$ j. $\int x (\ln x)^2 dx$

4. Obliczyć całki wykorzystując znane metody.

a. $\int x \ln(1 + x^2) dx$ f. $\int x e^{x^2} (x^2 + 1) dx$ k. $\int \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}} dx$

b. $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx$ g. $\int \frac{1}{1 + e^x} dx$ l. $\int \frac{x}{x^4 + 1} dx$

c. $\int (3 + 2\sqrt[4]{x})^3 dx$ h. $\int \frac{1}{2 + \sqrt{x}} dx$ m. $\int |x^2 - 1| dx$

d. $\int \ln^2 x dx$ i. $\int e^{x^2} x^3 dx$ n. $\int \frac{x^2 + |x-1|}{x} dx$

e. $\int x \arctg x dx$ j. $\int \ln(x^2 + 1) dx$

5. Obliczyć podane całki nieoznaczone.

a. $\int \frac{2x+3}{x-2} dx$	g. $\int \frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+9)} dx$	m. $\int \frac{x^2 dx}{x^2+2x+1}$
b. $\int \frac{x^2}{x+1} dx$	h. $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} dx$	n. $\int \frac{x^2}{x^2+2x+5} dx$
c. $\int \frac{5}{(x+4)^8} dx$	i. $\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2} dx$	o. $\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$
d. $\int \frac{x+2}{x(x-2)} dx$	j. $\int \frac{dx}{x^2+2x+8}$	p. $\int \frac{2x+1}{(x^2+2)^3} dx$
e. $\int \frac{1}{(x-1)x^2} dx$	k. $\int \frac{dx}{x^8+x^6}$	q. $\int \frac{3x}{(x^2+3)^{10}} dx$
f. $\int \frac{x^4 dx}{x^4-16}$	l. $\int \frac{x}{1-x^4} dx$	

6. Obliczyć podane całki oznaczone.

a. $\int_0^1 \sqrt{x} dx$	d. $\int_{-1}^0 (x+1)^{115} dx$	g. $\int_0^{\pi/4} \frac{x^2 dx}{x^2+1}$
b. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+x}$	e. $\int_1^2 \ln x dx$	h. $\int_0^1 x(1-x)^2 dx$
c. $\int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx$	f. $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$	i. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$

7. Wartość średnia funkcji f na przedziale $[a, b]$ wyraża się wzorem:

$$f_{\text{sr.}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \text{ Obliczyć wartości średnie podanych funkcji na wskazanych przedziałach:}$$

a. $f(x) = \frac{x}{x-1}; [-2, 0]$
b. $f(x) = e^{2x}; [-1, 1]$
c. $f(x) = 4xe^{-3x^2}; [-7, 7]$

8. Obliczyć pola figur ograniczonych przez krzywe:

a. $y=x^2-4; y=2$	f. $y=\frac{1}{x}; y=x; x=2$
b. $y=-x^2; x+y+2=0$	g. $y=2- 2-x ; y=\frac{3}{ x }$
c. $y=x^3; y=4x$	h. $y=x^2; y=\frac{1}{2}x^2; y=3x$
d. $y=x(x-1)(x+2)(x-3); y=0$	i. $y=e^{-x}; y=e^{3x}; y=\sqrt{e}$
e. $y=\text{sgn}(x); x=-1; x=0; x=1; y=0$	

9. Zbadać zbieżność podanych całek niewłaściwych. Dla całek zbieżnych obliczyć ich wartości.

a. $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$

e. $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

i. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

b. $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{x^2+4}$

f. $\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$

j. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2}}$

c. $\int_{-\infty}^0 e^{2x} dx$

g. $\int_1^2 \frac{dx}{x-1}$

k. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-1}$

d. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

h. $\int_{\pi}^{3\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x}$

10. Obliczyć długości podanych krzywych.

a. $y=2\sqrt{x^3}; 0 \leq x \leq 11$

b. $y=e^x; \frac{1}{2} \ln 2 \leq x \leq \frac{1}{2} \ln 3$

c. $y=\frac{x^5}{10} + \frac{1}{6x^3}; 1 \leq x \leq 2$

11. Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu łuku:

a. $y=x^2+1 \quad 1 \leq x \leq 2$ wokół osi OX

b. $y=2x^2+3 \quad 0 \leq x \leq 1$ wokół osi OY

c. $y=\sqrt{x}+1 \quad 1 \leq x \leq 4$ wokół osi OY

d. $y=\cos 2x \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ wokół osi OX

e. $y=\ln x \quad 1 \leq x \leq e$ wokół osi OY

12. Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu figury ograniczonej liniami:

a. $xy=4; x=1; y=0; x=4$ wokół osi OX

b. $y=x^2; y=\sqrt{x}$ wokół osi OX

c. $y=\sqrt{x}; y=0; x=1; x=4$ wokół osi OY

d. $y=\ln x; y=0; x=e$ wokół osi OY

13. Obliczyć pole powierzchni obrotowej powstałej z obrotu krzywej:

a. $y=2\sqrt{x}; 0 \leq x \leq 1$ wokół osi OX

b. $y=x^3; 0 \leq x \leq 2$ wokół osi OX

c. $y=\frac{1}{2}x^2; 0 \leq x \leq \sqrt{3}$ wokół osi OY