

FUNKCJA JEDNEJ ZMIENNEJ (GRANICA FUNKCJI, CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI, ASYMPTOTY)

1. Dana jest funkcja

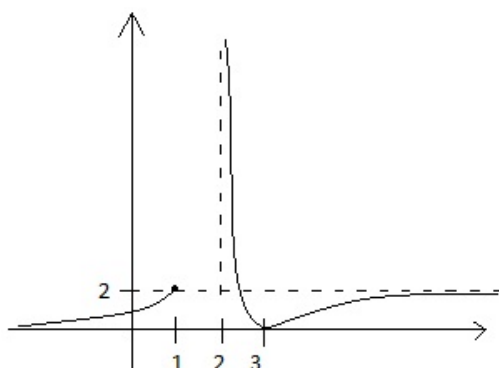
$$a) f(x) = x^2 \quad b) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x-1} & \text{dla } x > 1 \\ 2-x & \text{dla } x \leq 1 \end{cases}$$

Obliczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ jeżeli $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ oraz $x_n = 1 - \frac{1}{n}$

2. Korzystając z definicji Heiny'ego udowodnić, że

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{x+2} = 1 \quad b) \lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 3x + 1) = 3$$

3. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$



Podaj jej dziedzinę oraz granice na końcach przedziałów określoności.

4. Naskicować przykładowy wykres funkcji spełniającej warunki:

- a) $D_f = \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$
 b) $D_f =]0, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$
 c) $D_f =]-2, 3)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$

5. Obliczyć granice funkcji

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} \quad b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15} \quad c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^5(x+2)^3}{3x^8+x} \quad d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{3x-2}-2} \quad f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \quad g) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{g+h}-3}{h} \quad h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2-h^2}{x}$$

$$i) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$$

6. Udowodnić, że

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

7. Obliczyć granice

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 3x & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + x^4}{1 - \cos 2x} \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\sin 2x} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{3x^2 + x} & \text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{1}{x+1}} & \text{h) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ \text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 2x)^{\frac{1}{3x}} & \text{j) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} & \text{k) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x} & \text{l) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg} x \right) \end{array}$$

8. Znaleźć takie wartości parametrów a i b, aby

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0$$

9. Naszkicować przykładowy wykres funkcji $y = f(x)$ spełniający warunek

$$D_f = \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = x - 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2) = 0$$

10. Wyznaczyć wszystkie asymptoty funkcji

$$\text{a) } y = \frac{x^3}{x^2 + x - 2} \quad \text{b) } y = x + \sin 2x \quad \text{c) } y = \frac{x^2 - 1}{2 - 2x} \quad \text{d) } y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \quad \text{e) } y = 2x + \operatorname{arctg} x$$

11. Zbadać ciągłość funkcji w zbiorze liczb rzeczywistych

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{2 - x} & \text{dla } x > 2 \\ 2 - 3x & \text{dla } x \leq 2 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{4x} & \text{dla } x \neq 0 \\ \sqrt[3]{0,125} & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

12. Dobrać (jeżeli to możliwe) parametry tak, aby poniższe funkcje były ciągłe w zbiorze $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{dla } x > 1 \\ 2ax + 3 & \text{dla } x \leq 1 \end{cases} & \text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 2 - a^2 & \text{dla } x = 0 \end{cases} \\ \text{c) } f(x) = \begin{cases} -2\sin x & \text{dla } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a\sin x + b & \text{dla } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{dla } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases} & \text{d) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{dla } |x| > 1 \\ ax + b & \text{dla } |x| \leq 1 \end{cases} \end{array}$$

Dla wyznaczonych parametrów naszkicować powyższe funkcje

ZADANIA DODATKOWE

1. Oblicz granice

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2^x}{x}$ d) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(e+h) - 1}{h}$

2. Wyznaczyć parametr a tak aby funkcja

$$f(x) = \begin{cases} |\ln x| & \text{dla } x \geq \frac{1}{e} \\ -x + a & \text{dla } x < \frac{1}{e} \end{cases}$$

była ciągła w przedziale $x_0 = \frac{1}{e}$.

Dla wyznaczonego parametru naszkicować wykres funkcji $f(x)$.

3. Wyznaczyć asymptoty funkcji

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+2} & \text{dla } x \geq 0 \\ \frac{x^2-x}{x^2-1} & \text{dla } x < 0 \end{cases}$ b) $f(x) = x \cdot 2^{\frac{1}{x}}$