

Zadania z analizy matematycznej dla I roku IB, liGW, IŚ.

Lista 6. Funkcje wielu zmiennych.

1. Wyznaczyć i narysować dziedziny naturalne podanych funkcji :

a. $f(x,y)=\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2-25}}$ c. $f(x,y)=\arcsin\frac{x}{y}$

b. $f(x,y)=\frac{1}{(x-3)(y+1)}$ d. $f(x,y)=\ln\frac{x^2+y^2-4}{9-x^2-y^2}$

2. Znaleźć poziomice wykresów podanych funkcji i na tej podstawie naszkicować te wykresy.

a. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ c. $f(x,y)=y-x^2$

b. $f(x,y)=\frac{1}{1+x^2+y^2}$ d. $f(x,y)=2-x^2-y^2$

3. Zbadać, czy podane ciągi punktów na płaszczyźnie lub w przestrzeni są zbieżne. Dla ciągów zbieżnych wyznaczyć ich granice.

a. $(x_n, y_n)=((-1)^n, \sin\frac{\pi}{n})$

b. c. $(x_n, y_n)=((1-\frac{3}{n+1})^{2n}, (\frac{2}{3})^n)$

c. $(x_n, y_n, z_n)=(\frac{n^2}{n^2+1}, \sqrt[n]{4}, 6)$ d. $(x_n, y_n)=(2^n, \frac{3n}{n^2+4})$

4. Obliczyć, jeżeli istnieją, granice podanych funkcji :

a. $\lim_{(x,y)\rightarrow(1,1)}\frac{x^3-y^3}{y-x}$

b. $\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

c. $\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)}\frac{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$

e. $\lim_{(x,y)\rightarrow(1,1)}\frac{x+y-2}{x^2+y^2-2}$

d. $\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)}(x^2+y^2)\cos\frac{1}{xy}$

f. $\lim_{(x,y)\rightarrow(0,3)}\frac{\sin x^2 y}{x^2}$

5. Korzystając z definicji obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu podanych funkcji we wskazanych punktach :

a. $f(x,y)=\frac{x}{y}$; $(x_0, y_0)=(-2, 1)$

b. $f(x,y,z)=\frac{x^2}{y}+2z-3$; $(x_0, y_0, z_0)=(0, 1, 2)$

6. Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu podanych funkcji.

a. $f(x,y)=2x^2 + 3xy + y^2 - 2x - y + 4$

b. $f(x,y)=4xy+\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 7$

c. $f(x,y)=xy^2(1 - x - y)^3$

d. $f(x,y)=x-2y+\ln \sqrt{x^2 + y^2} + 3\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

e. $f(x,y)=\sin(x^2 + y^2)-e^5$

f. $f(x,y)=xe^{xy}$

g. $f(x,y,z)=\ln(x^6 + y^4 + z^2 + 3)$

h. $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

7. Wyznaczyć ekstrema funkcji :

a. $f(x,y)=3(x - 1)^2 + 4(y - 2)^2$

b. $f(x,y)=x^3 + y^3 - 3xy$

c. $f(x,y)=x^3 + 3x^2y - 6xy - 3y^2 - 15x - 15y$

d. $f(x,y)=x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$

e. $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2+2x)}$

f. $f(x,y)=1-\sqrt{x^2 + y^2}$

8. Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżone wartości podanych wyrażeń.

a. $(1,02)^3(0,997)^2$

b. $\sqrt[3]{(2,93)^3 + (4,05)^3 + (4,99)^3}$

c. $\frac{\operatorname{arctg}0,9}{\sqrt{4,02}}$