

Zadania z algebry dla I roku GiK.

Lista 4. Geometria analityczna.

- Obliczyć długości podanych wektorów:
 - $\vec{a}=[-3,4,12]$; $\vec{b}=[\sqrt{3}, -\sqrt{5}, 2\sqrt{2}]$
 - $\overrightarrow{AB}$, jeśli $A=(1, 0, -2)$; $B=(4, -7, 2)$.
- Obliczyć iloczyny skalarne podanych par wektorów:
 - $\vec{a}=[1, 0, 5]$, $\vec{b}=[3, -1, -2]$
 - $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{k}$; $\vec{v}=-\vec{i}+\sqrt{5}\vec{j}+7\vec{k}$
- Korzystając z iloczynu skalarnego obliczyć miarę kąta między wektorami:
 - $\vec{a}=[3, -1, 2]$, $\vec{b}=[1, 2, 3]$
 - $\vec{a}=[3, -1, 2]$, $\vec{b}=[4, 2, -5]$
- Obliczyć długość rzutu prostokątnego wektora $\vec{a}=[\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{5}]$ na wektor $\vec{b}=[-\sqrt{8}, 0, \sqrt{5}]$.
- Obliczyć iloczyny wektorowe podanych par wektorów:
 - $\vec{a}=[-3, 2, 0]$, $\vec{b}=[2, 5, -1]$
 - $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{k}$, $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$.
- Obliczyć pola powierzchni figur:
 - równoległoboku rozpiętego na wektorach: $\vec{a}=[1, 2, 3]$, $\vec{b}=[0, -2, 5]$
 - trójkąta o wierzchołkach: $A=(1, -1, 3)$, $B=(0, 2, -3)$, $C=(2, 2, 1)$
- Trójkąt ABC rozpięty jest na wektorach: $\overrightarrow{AB}=[1, 5, -3]$, $\overrightarrow{AC}=[-1, 0, 4]$.
Obliczyć wysokość tego trójkąta opuszczoną z wierzchołka C.
- Obliczyć iloczyny mieszane podanych trójek wektorów:
 - $\vec{a}=[-3, 2, 1]$, $\vec{b}=[0, 1, -5]$, $\vec{c}=[2, 3, -4]$
 - $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{v}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{w}=-\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}$
- Obliczyć objętości podanych wielościanów:
 - równoległościanu rozpiętego na wektorach: $\vec{a}=[-1, 2, 3]$, $\vec{b}=[0, 0, 1]$, $\vec{c}=[2, 5, -1]$
 - czworościanu o wierzchołkach: $A=(1, 1, 1)$, $B=(1, 2, 3)$, $C=(2, 3, -1)$, $D=(-1, 3, 5)$

10. Napisać równania ogólne i parametryczne płaszczyzn spełniających podane warunki:

- płaszczyzna przechodzi przez punkt $P=(1, -2, 0)$ i jest prostopadła do wektora $\vec{n}=[4, -3, 2]$
- płaszczyzna przechodzi przez punkty: $P=(0, 0, 0)$, $Q=(3, 2, 1)$, $R=(-1, -3, 5)$
- płaszczyzna przechodzi przez punkty $P=(1, -3, 4)$, $R=(2, 0, -1)$ oraz jest prostopadła do płaszczyzny xOz
- płaszczyzna przechodzi przez punkt $P=(1, -1, 3)$ oraz jest równoległa do wektorów $\vec{a}=[1, 1, 0]$, $\vec{b}=[0, 1, 1]$
- płaszczyzna przechodzi przez punkt $P=(0, -2, 3)$ i jest równoległa do płaszczyzny $\pi: 3x-y+z=0$
- płaszczyzna przechodzi przez punkt $P=(2, 1, -3)$ i jest prostopadła do płaszczyzn: $x+z=0$, $y-z=0$
- płaszczyzna przechodzi przez prostą $l: \frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$ i punkt $P=(3, 1, -2)$
- płaszczyzna przechodzi przez prostą $l: \frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-2}{-3}$ i jest równoległa do prostej $k: \frac{x+5}{4} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-1}{2}$

11. Napisać równania parametryczne i kierunkowe prostych spełniających podane warunki:

- prosta przechodzi przez punkt $P=(-2, 5, 3)$ i jest równoległa do wektora $\vec{v}=[2, -1, 3]$
- prosta przechodzi przez punkty $A=(1, 0, 6)$, $B=(-2, 2, -4)$
- prosta przechodzi przez punkt $P=(0, -2, 3)$ i jest prostopadła do płaszczyzny $3x-y+2z-6=0$
- prosta przechodzi przez punkt $P=(7, 2, 0)$ i jest prostopadła do wektorów $\vec{u}=[2, 0, 3]$, $\vec{v}=[-1, 2, 0]$
- prosta jest dwusieczną kąta utworzonego przez proste:
 $\frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z}{5}$, $\frac{x+2}{1} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z}{3}$

12. Obliczyć odległość między prostymi:

- $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}$ i $\frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}$
- $\frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{1}$ i $\frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{2}$

13. Znaleźć współrzędne środka i promień sfery:

- $x^2+y^2+z^2-6x+8y+2z+10=0$
- $x^2+y^2+z^2+2x-4y-4=0$
- $x^2+y^2+z^2+8x-2y-4z+18=0$

14. Znaleźć środek i promień okręgu $\begin{cases} 3x - y - z - 9 = 0 \\ (x - 4)^2 + (y - 7)^2 + (z + 1)^2 = 36 \end{cases}$
15. Znaleźć równania płaszczyzn stycznych do sfery $(x - 4)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 225$ i równoległych do płaszczyzny $10x - 11y - 2z + 6 = 0$.
16. W punktach wspólnych prostej $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{2}$ i sfery $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 6$ poprowadzić płaszczyzny styczne do sfery.
17. Znaleźć punkty przecięcia elipsoidy $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1$ z prostą $\frac{x-4}{2} = \frac{y+6}{-3} = \frac{z+2}{-2}$.
18. Znaleźć równanie elipsoidy przechodzącej przez elipsę $\begin{cases} z = 0 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \end{cases}$ i punkt $M = (1, 2, \sqrt{23})$, wiedząc, że osiami symetrii tej elipsoidy są osie układu współrzędnych.