

Zadania z algebry dla I roku GiK.

Lista 3. Macierze, wyznaczniki, układy równań liniowych.

1. Dane są macierze:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Obliczyć (o ile jest to możliwe):

$$2A - 3A^T, B^T + 2D, AB, A^2, B^2, 2A^2 - A, D^2, C^T B^T, A^3.$$

2. Rozwiązać równania i układy równań macierzowe.

$$\begin{aligned} \text{a. } X + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \left(X - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \right) & \text{d. } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} X &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \\ \text{b. } 2Y \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + Y \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{c. } \begin{cases} 2X + Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ X - Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{cases} & \text{e. } \begin{cases} X + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X + Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \end{aligned}$$

3. Obliczyć wyznaczniki.

$$\begin{aligned} \text{a. } \begin{vmatrix} -\frac{5}{2} & 4 \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{vmatrix} & \text{d. } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\ \text{b. } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} & \text{e. } \begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} \\ \text{c. } \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & -7 \\ 1 & 3 & -5 & 9 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \end{vmatrix} & \end{aligned}$$

4. Wyznaczyć macierze odwrotne do macierzy:

$$\begin{aligned} \text{a. } A &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} & \text{c. } \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{b. } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{d. } C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

5. Wykorzystując operację odwracania macierzy rozwiązać podane równania macierzowe.

$$\text{a. } \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b. } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{c. } X \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

6. Korzystając ze wzorów Cramera rozwiązać układy równań:

$$\text{a. } \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$$

$$\text{c. } \begin{cases} x + z = 5 \\ y - z = -2 \\ w + z = 7 \\ x + w = 4 \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\text{d. } \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2y - z = 1 \\ z + x = -1 \end{cases}$$

7. Rozwiązać układy równań metodą macierzy odwrotnej.

$$\text{a. } \begin{cases} -x + 2y = 1 \\ -x + 3y = 2 \end{cases} \quad \text{b. } \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 3y = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

8. Stosując metodę eliminacji Gaussa rozwiązać podane układy równań.

$$\text{a. } \begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ x + y + z = 1 \\ 2x - 3y + 5z = 10 \\ 5x - 6y + 8z = 19 \end{cases} \quad \text{c. } \begin{cases} x + 2y + 3z + t = 1 \\ 2x + 4y - z + 2t = 2 \\ 3x + 6y + 10z + 3t = 3 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} x + 2y + z + t = 7 \\ 2x - y - z + 4t = 2 \\ 5x + 5y + 2z + 7t = 1 \end{cases} \quad \text{d. } \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x - y + 5z = 1 \\ 3x - 3y + 8z = 3 \end{cases}$$

$$\text{c. } \begin{cases} x + 2y + 3z - t = -1 \\ 3x + 6y + 7z + t = 5 \\ 2x + 4y + 7z - 4t = -6 \end{cases}$$

9. Dla podanych macierzy znaleźć wartości własne i odpowiadające im wektory własne.

$$\text{a. } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{b. } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{c. } C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{d. } D = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$