

POCHODNA FUNKCJI- ZASTOSOWANIE

1. Znaleźć przedziały monotoniczności funkcji

a) $y = x^2 e^{-2x}$

b) $y = x \ln x$

c) $y = \frac{x^3}{x-2}$

2. Znaleźć wszystkie ekstrema funkcji

a) $y = x + \frac{1}{x}$

b) $y = (x - 5)e^{2x}$

c) $y = \frac{(x+3)^2}{(x+1)^2}$

d) $y = \frac{x}{\ln x}$

3. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granice

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln(\sin x)}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{3x} + 4x)^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\pi x} + 3x - 1}{\ln(5x+1)}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \right)$

g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

h)* $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctg x \right)^x$

i) * $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x}{\ln x}$

4. * Obliczyć granice

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{\sin^2 x}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \cos 3x}{x - \cos 2x}$

5. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji w danym przedziale

a) $y = x^2 \ln x$ $< 1, e >$

b) $y = x - 2\sqrt{x}$ $< 0,5 >$

c) $y = (x - 3)^2 e^{|x|}$ $< -1,4 >$

d) $y = \arctg x - \frac{x}{2}$ $< 0,2 >$

6. Określić przedziały wypukłości i punkty przegięcia funkcji

a) $y = x e^{-2x}$

b) $y = \ln(1 + x^2)$

c) $y = \frac{1}{1-x^2}$

7. Zbadać przebieg zmienności funkcji i sporządzić wykres

a) $y = x^3 - 3x^2 + 4$

b) $y = \frac{x}{1-x^2}$

c) $y = e^{-x^2}$

d) $y = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$

e) $y = x^2 e^{-x}$

f) $y = \frac{\ln x}{x}$

8. Jakie wymiary powinien mieć prostokąt o największym polu wycięty z kartonu w kształcie półkola o promieniu $R=4\text{dm}$? (Jeden bok prostokąta leży na średnicy).

9. Z kuli o promieniu $R=10\text{cm}$ wytoczono walec o największej objętości. Podać wymiary walca.

10. Jaki powinien być promień podstawy stożka o tworzącej $l=6\text{cm}$, aby miał on największą objętość?

11. Z blachy w kształcie prostokąta o wymiarach 30 cm, 24 cm wycięto na rogach kwadraty tak, że po zgięciu powstało prostopadłościenną pudełko. Jaka ma być długość boku kwadratu, aby objętość pudełka była maksymalna?

12.* Jakie powinny być wymiary szklanki o grubości ścianki $d=2\text{mm}$ i pojemności $0,2\text{ dm}^3$, aby ilość szkła potrzebnego do jej wytworzenia była najmniejsza?