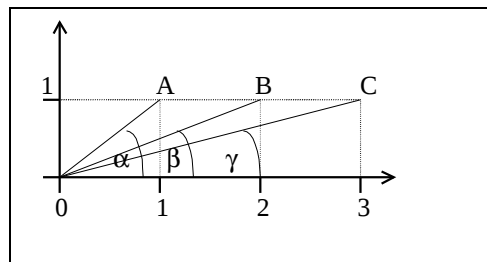


ALGEBRA Lista 1

- Sprawdzić, że suma, różnica, iloczyn oraz iloraz
 - liczb wymiernych jest wymierny;
 - liczby wymiernej i niewymiernej jest niewymierny. (Zawsze?)
- Udowodnić, że $\sqrt{3}$ jest liczbą niewymierną.
- Udowodnić prawdziwość prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania w zbiorze liczb wymiernych i zespolonych
- Rozwiązać równanie: $(-2+i)x + (5+3i)y = 3+i$; $x, y \in \mathbb{R}$, i -jedn.uroj.
- Wykonać działania: $\frac{1+i \cdot \operatorname{tg} x}{1-i \cdot \operatorname{tg} x}$, $\frac{a+bi}{a-bi}$, $\frac{(1+2i)^2 - (1-i)^2}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}$
- Rozwiązać równania: $x^2 + x + 1 = 0$; $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$; $x^3 + 4x^2 + 6x + 4 = 0$.
- Udowodnić, że dla dowolnych liczb zespolonych z_1, z_2 zachodzą związki: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- Przedstawić w postaci trygonometrycznej liczby:
 $1+i, 1+i\sqrt{3}, \sqrt{3}-i, -1, 2+\sqrt{3}+i, \sqrt{2+\sqrt{2}}+i \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}}$
- Rozwiązać równania: $z^3 = -1$; $z^6 = -64$; $z^4 = -2-2\sqrt{3}i$.
- Korzystając ze wzoru Moivre'a wyrazić $\sin 5x$ przez potęgi $\sin x$.
- Naszkicować na płaszczyźnie zespolonej zbiory liczb spełniających warunek:
 - $|z| < 2$
 - $\operatorname{Re} z^3 = 1$
 - $|\arg z| \leq \frac{\pi}{6}$
 - $|z-i| \leq 3$
 - $\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z < 1$
 - $|z-1-i| < 1$
 - $|z| = 2a \operatorname{Re} z$
 - $|z-i| + |z+1| \leq 3$
 - $|z|^2 = 2a \operatorname{Re} z + 2b \operatorname{Im} z + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- Udowodnić, że dla dowolnych liczb zespolonych u, w zachodzą związki
 - $|u w| = |u| |w|$
 - $|u + w| \leq |u| + |w|$
- Obliczyć $(1 + \cos x + i \sin x)^n$, $n \in \mathbb{N}$. WSK: Wzór Moivre'a

- Niech a, b, g będą kątami pomiędzy osią Ox a odcinkiem łączącym odpowiednio punkt $A(1,1)$, $B(2,1)$ oraz $C(3,1)$ z początkiem układu współrzędnych (patrz rysunek).

Udowodnić, że $a + b + g = \frac{\pi}{2}$.



- Wyprowadzić wzór na wyrażenie $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$.

WSK: Oblicz $1 + z + z^2 + \dots + z^n$ dla $z = \cos x + i \sin x$.

- * Dla jakich $a, b \in \mathbb{R}$ wielomian $ax^{20} + bx^{19} + 1$ dzieli się przez wielomian $x^2 + x + 1$ bez reszty?