ALGEBRA lista 2

0. Obliczyć resztę z dzielenia wielomianu $x^{100}+4x^2+1$ przez x^2-1.
1. Wyznaczyć postać rozkładu na sumę ułamków prostych (nie wyliczać współczynników)

   dla funkcji: $\dfrac{2x^2+3}{(x-1)^2\cdot(x^2-1)^3\cdot(x^2+4)^4}$, $\dfrac{3x-5}{(x^4+x^2+1)^2}$

2. Niech $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$, $I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

   Obliczyć: A-$3B$, $B^{\mathbf{T}}$, $B\,I$, $(2A+B)\,C$, $(2C)^{\mathbf{2}}$, $(A+B)^{\mathbf{5}}$, $C^{\mathbf{2}}+I\,C$.

3. Znaleźć wzory na n-te potęgi macierzy:

   a) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}^n$, b) $\begin{bmatrix}a & 1\\ 0 & a\end{bmatrix}^n$. Udowodnić indukcyjnie prawdziwość wzorów

4. Udowodnić (indukcja), że dla dowolnych $n,k\in N$

   a) $\begin{bmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\cos nx & \sin nx\\ -\sin nx & \cos nx\end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix}a_1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & a_2 & 0 & \ldots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_k\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}a_1{}^n & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & a_2{}^n & 0 & \ldots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_k{}^n\end{bmatrix}$.

5. Niech $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$ - macierz stopnia n.

   Znaleźć A^{k}. $(k\in N)$

6. Udowodnić równości: $(A+B)^{\boldsymbol{T}}=A^{\boldsymbol{T}}+B^{\boldsymbol{T}}$; $(A\,B)^{\boldsymbol{T}}=B^{\boldsymbol{T}}A^{\boldsymbol{T}}$; $\left(A^n\right)^T=\left(A^T\right)^n$

   Jakie założenia należy poczynić w poszczególnych równościach?

7. Wyznaczyć z definicji macierz odwrotną do macierzy:

   a) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & 3 & 6\\ 0 & 4 & 0\end{bmatrix}$

8. Rozwiązać równania macierzowe: $\mathbf{X}^2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $\mathbf{X}^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

9. Sprawdzić, że: $(\mathbf{A\,B})^{\mathbf{-1}}=\mathbf{B}^{\mathbf{-1}}\,\mathbf{A}^{\mathbf{-1}}$; $(\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathbf{-1}}$

10. Niech $\mathbf{A}^{\mathbf{k}}=\mathbf{0}$ (macierz zerowa). Pokazać, że jeśli $(\mathbf{I}$-$\mathbf{A})^{\mathbf{-1}}$ - istnieje, to $(\mathbf{I}$-$\mathbf{A})^{\mathbf{-1}}=\mathbf{I}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathbf{2}}+\mathbf{A}^{\mathbf{3}}+\ldots\mathbf{A}^{\mathbf{k-1}}$, $\mathbf{I}$- macierz jednostkowa

11. Niech **A**,**B**- nieosobliwe macierze stopnia n. Pokazać, że równości $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$, $\mathbf{AB}^{\mathbf{-1}}=\mathbf{B}^{\mathbf{-1}}\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{\mathbf{-1}}\mathbf{B}=\mathbf{BA}^{\mathbf{-1}}$, $\mathbf{A}^{\mathbf{-1}}\mathbf{B}^{\mathbf{-1}}=\mathbf{B}^{\mathbf{-1}}\mathbf{A}^{\mathbf{-1}}$ - są równoważne.

Roman Dąbrowski