

ALGEBRA lista 3

- Niech X - zbiór macierzy stopnia n przemiennych z każdą macierzą.
Pokażać, że X - zamknięty ze względu na działania dodawania, mnożenia, transponowania i odwracania macierzy, tzn. jeśli $A, B \in X$, to $A+B, AB, A^T, A^{-1}$ (jeśli istnieje) $\in X$
- Wykazać, że $|A^{-1}| = |A|^{-1}$, $|A^n| = |A|^n$, $|BAB^{-1}| = |A|$.
- Wyznaczyć $\lambda \in \mathbb{R}$ spełniające równanie $|A - \lambda I| = 0$, gdzie I - macierz jednostkowa, zaś:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \text{ b) } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ c) } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Dla znalezionych λ znaleźć macierz kolumnową X spełniającą równanie $AX = \lambda X$.

- Obliczyć wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & a & x \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & c \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a & \mathbf{K} & a \\ 0 & 2 & a & \mathbf{K} & a \\ 0 & 0 & 3 & \mathbf{K} & a \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{K} & n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \mathbf{K} & 2 & 1 \\ n & n-1 & n-2 & \mathbf{K} & 2 & 0 \\ n & n-1 & n-2 & \mathbf{K} & 0 & 0 \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ n & 0 & 0 & \mathbf{K} & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b & b & b & \mathbf{K} & b \\ b & a & b & b & \mathbf{K} & b \\ b & b & a & b & \mathbf{K} & b \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ b & b & b & b & \mathbf{K} & a \end{vmatrix}$$

- Określić rząd macierzy:

$$\text{a), } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ b) } \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 13 & 7 \end{bmatrix}, \text{ c) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

- Korzystając ze wzorów Cramera rozwiązać układy równań:

$$\text{a) } \begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x-y+z=3 \\ x+y-2z=0 \end{cases}, \text{ b) } \begin{cases} x+z=5 \\ y-z=-2 \\ w+z=7 \\ x+w=4 \end{cases}, \text{ c) } \begin{cases} x+y-z+w=4 \\ x-y-w=-1 \\ 2y+z+w=1 \\ 2x-z=3 \end{cases}$$

- * Rozwiązać układy równań:

$$\text{a) } \begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x-y+z=3 \\ x-3y+2z=2 \end{cases}, \text{ b) } \begin{cases} x+z=5 \\ y-z=-2 \\ x-y=7 \\ x+y=4 \end{cases}, \text{ c) } \begin{cases} -x+y+2z=2 \\ x-y-z=-1 \\ 2y+z+x=4 \\ x+2y+2z=5 \end{cases}$$