

Zadania z analizy matematycznej dla I roku IB, liGW, IŚ.

Lista 7. Całki podwójne i potrójne.

- Obliczyć podane całki podwójne po wskazanych prostokątach.
 - $\iint_P \frac{dxdy}{(x+y+1)^3}$; gdzie $P=[0,2] \times [0,1]$
 - $\iint_P x \sin xy dx dy$; gdzie $P=[0,1] \times [\pi, 2\pi]$
- Całkę podwójną $\iint_D f(x,y) dx dy$ zamienić na całki iterowane, jeżeli obszar D ograniczony jest krzywymi o równaniach:
 - $x^2 + y = 2$; $y^3 = x^2$
 - $x^2 + y^2 = 4$; $y = 2x - x^2$; $x = 0$; $x, y \geq 0$
 - $x^2 - 4x + y^2 + 6y - 51 = 0$
- Obliczyć podane całki podwójne:
 - $\iint_D (x^2 - xy) dx dy$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x, y \leq 3x - x^2\}$
 - $\iint_D xy dx dy$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 6 - x, y \geq \sqrt{x}, x \geq 0\}$
 - $\iint_D xy dx dy$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2 \text{ i } x \geq 0\}$
 - $\iint_D y dx dy$; gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi:
 $x^2 + y^2 = 4$; $x^2 + y^2 = 1$; $y = x$; $y = 0$ ($x, y \geq 0$)
 - $\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy$; gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywą
 $x^2 + y^2 = 3$
- Wartością średnią funkcji $y=f(x,y)$ na obszarze D nazywamy liczbę:
 $f_{\text{sr.}} = \frac{1}{|D|} \iint_D f(x,y) dx dy$; gdzie $|D|$ - pole obszaru D .
Wysokość nad poziomem morza pewnego terenu jest opisana wzorem:
 $w(x,y) = 20 + \sin x \cos 2y$; gdzie $(x,y) \in [0, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Obliczyć średnie wzniesienie tego terenu.
- Obliczyć pola obszarów ograniczonych podanymi krzywymi:
 - $y^2 = 4x$, $x+y=3$, $y=0$ ($y \geq 0$)
 - $x+y=4$, $x+y=8$, $x-3y=0$, $x-3y=5$
- Obliczyć objętość brył ograniczonych podanymi powierzchniami:
 - $z=5-2x-y$; $x=0$; $y=0$; $z=0$.
 - $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; $x^2 + y^2 = 1$
 - $z = 4 - x^2 - y^2$; $z=0$

7. Obliczyć podane całki potrójne po wskazanych prostopadłościanach.

a. $\iiint_P (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz; P = [-1, 1] \times [0, 1] \times [0, 2]$

b. $\iiint_P \frac{1}{xyz} dx dy dz; P = [3, 4] \times [1, 2] \times [2, 3]$

c. $\iiint_P z x \sin x y dx dy dz; P = [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}] \times [0, \pi] \times [0, 1]$

8. Obliczyć podane całki potrójne po obszarach ograniczonych wskazanymi powierzchniami.

a. $\iiint_U y dx dy dz; U: z = y, z = 0, y = 1 - x^2$

b. $\iiint_U \cos \frac{z}{y} dx dy dz; U: y = \frac{\pi}{6}, y = x, x = \frac{\pi}{2}, z = xy, z = 0$

c. $\iiint_U x^2 y z dx dy dz; U: x = 2, y = -x, y = x^2, z = 0, z = x + y$

9. W punkcie (x, y, z) prostopadłościanu $P = [0, \pi] \times [0, 2] \times [0, 3]$ temperatura jest określona wzorem:

$$T(x, y, z) = y \sin \pi x + z.$$

Obliczyć średnią temperaturę w tym prostopadłościanie.

10. Obliczyć objętość obszarów ograniczonych podanymi powierzchniami.

a. $3x + 6y + 4z = 12, x = 0, y = 0, z = 0$

b. $y = x^2, y + z = 4, x = 0, z = 0$