

Zadania z analizy matematycznej dla I roku IB, liGW, IŚ.

Lista 8. Całki krzywoliniowe.

1. Obliczyć podane całki krzywoliniowe skierowane:

- $\int_{AB} (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy$; jeżeli $\overline{AB}$ jest łukiem paraboli $y=x^2$, łączącym punkt $A=(1,1)$ z punktem $B=(2,4)$.
- $\int_{AB} (2a - y)dx + xdy$; jeżeli $\overline{AB}$ jest łukiem cycloidy o przedstawieniu parametrycznym: $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad t \in < 0, 2\pi >$, niezgodnym z kierunkiem tego łuku.
- $\int_{AB} 2xydx - x^2dy$; jeżeli AB jest:
 - odcinkiem
 - łukiem paraboli $y=x^2$ łączącym punkt $A=(0,0)$ z punktem $B=(1,1)$.
- $\oint_K x^2dx + y^2dy$; jeżeli K jest okręgiem o równaniu $x^2 + y^2 = r^2$.
- $\oint_K ydx + 2xdy$; jeżeli K jest elipsą o równaniu $4x^2 + y^2 - 4 = 0$.
- $\int_K xdx + ydy$; jeżeli K jest brzegiem kwadratu o wierzchołkach $A=(0,0)$; $B=(0,1)$; $C=(1,1)$; $D=(1,0)$; skierowanym dodatnio względem swojego wnętrza.

2. Obliczyć podane całki krzywoliniowe skierowane:

- $\int_K xdx - ydy + 2zdz$; jeżeli K jest okręgiem o przedstawieniu parametrycznym: $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = 3 \end{cases} \quad t \in < 0, 2\pi >$ zgodnym z jego kierunkiem.
- $\int_{AB} xdx - ydy + 2zdz$; jeżeli AB jest odcinkiem łączącym punkt $A=(1,1,1)$ z punktem $B=(5,1,4)$.
- $\int_{AB} (y - z)dx + (z - x)dy + (y - x)dz$; jeżeli AB jest łukiem linii śrubowej o przedstawieniu parametrycznym: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases} \quad t \in < 0, 2\pi >$ niezgodnym z kierunkiem tego łuku.

3. Korzystając z twierdzenia Greena obliczyć podane całki krzywoliniowe skierowane:

a. $\oint_K (2x^3 - 11y)dx + (4x + \sin y)dy$; jeżeli K jest okręgiem o równaniu $x^2 + y^2 = 9$

b. $\oint_K ydx + 4xdy$; jeżeli K jest brzegiem kwadratu o wierzchołkach $O=(0,0)$, $A=(1,0)$, $B=(1,1)$, $C=(0,1)$.

4. Wykazać, że jeżeli K jest brzegiem obszaru normalnego D (względem osi OX i OY), skierowanym względem niego dodatnio, to pole S tego obszaru wyraża się wzorem: $S = \frac{1}{2} \oint_K -ydx + xdy$.

Obliczyć za pomocą tego wzoru pole obszaru ograniczonego elipsą.

5. Obliczyć całki krzywoliniowe płaskie nieskierowane.

a. $\int_L (x + y)dl$; gdzie L jest obwodem trójkąta o wierzchołkach $A=(0,0)$, $B=(1,0)$, $C=(0,1)$.

b. $\int_L (x^2 + y^2)dl$; gdzie L jest krzywą o równaniu:

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases} \quad t \in < 0, 2\pi >, a = \text{stała}, a > 0.$$

c. $\int_L x^2 y dl$, gdzie L jest częścią okręgu leżącą w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych.

d. $\int_L x^2 dl$; gdzie L jest górną częścią okręgu $x^2 + y^2 = a^2$ zawartą między punktami $A=(a,0)$, $B=(-a,0)$.

6. Obliczyć długość łuku:

a. okręgu o promieniu r

b. krzywej $y = x\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$

c. fragmentu cykloidy: $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad t \in < 0, 2\pi >.$

d. linii śrubowej o równaniu: $\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 3 \sin t \\ z = 4t \end{cases} \quad t \in < 0, 2\pi >.$