Zadania z analizy matematycznej dla I roku IB, IiGW, IŚ.

Lista 1. Ciągi liczbowe.

1. Podać wzór na a_n dla ciągów:
   a. 3, 5,7, 9, 11,…
   b. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$
   c. 1, 0, 1, 0,…
   d. 1, 3, 6, 10, 15, 21,…
   e. a_n –prawdopodobieństwo, że w rzucie sześcienną kostką do gry wypadnie n oczek
2. Obliczyć a_3, a_6, a_{k+1} wiedząc, że:
   a. $a_n = \frac{1}{n^2+2n}$
   b. $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$
   c. $\varphi_n : \begin{cases} \varphi_1 = 1 \\ \varphi_2 = 1 \\ \varphi_{n+2} = \varphi_n + \varphi_{n+1} \end{cases}$ (ciąg Fibonacciego)
3. Chart goni zająca, który jest przed nim o 150 stóp. Skok zająca wynosi 7 stóp, a skok charta, wykonany w tym samym czasie 9 stóp. Po ilu skokach chart dogoni zająca?
4. Zbadać monotoniczność i ograniczoność ciągów:
   a. $a_n = 5 + \frac{1}{n+3}$ c. $a_n = \frac{1+3+\dots+(2n-1)}{n^2+1}$ e. $a_n = \sqrt{6} - \frac{2}{n+7}$
   b. $a_n = \cos\frac{1}{n}$ d. $d_n : \begin{cases} d_1 = \sqrt{2} \\ d_{n+1} = \sqrt{2 + d_n} \end{cases}$
5. Obliczyć granice ciągów o podanych wyrazach ogólnych.
   a. $\frac{n^5-n^3+3}{2n^5-4n^2+\sqrt{5}}$ e. $\frac{1+2+3+\dots+n}{3-2*n^2}$ i. $\frac{4*2^n-3^n*5}{2^n+3^{n+2}}$
   b. $\frac{3n^3-2n^2+1}{-n^2+n^3-7}$ f. $\frac{5*3^{2n}-2}{7*9^n+6}$ j. $(n^5 - 3n^2 + 178n - 5)$
   c. n-$\sqrt{n^2+n}$ g. $\frac{n!(n+1)!}{(n-1)!(n+2)!}$
   d. $\frac{n}{\sqrt{4n^2+n}-2n}$ h. $\frac{\binom{n+1}{n-1}}{1+5+9+\dots+(4n-3)}$
6. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach obliczyć granice ciągów o podanych niżej wyrazach ogólnych.
   a. $\sqrt[n]{(\frac{257}{258})^n + (\frac{258}{259})^n}$ d. $\frac{1}{\sqrt[n]{2^{n+2}+3^n+1}}$

b. $\sqrt[n]{2^n + \pi^n + 3^n}$ e. $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

c. $\frac{1-n*\cos(n^n+n!)}{n^2+1}$

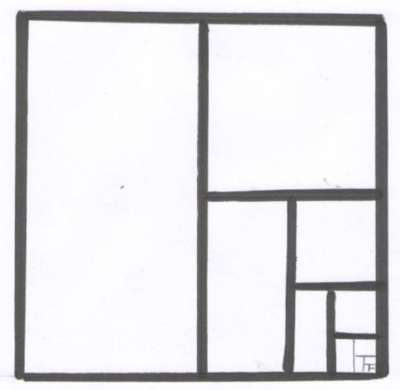
7. Obliczyć granice ciągów:
   a. $a_n = (1+\frac{3}{2n})^{7n}$ d. $d_n = (1+\frac{5}{6n+2})^n$
   b. $b_n = (1-\frac{3}{n^2})^{n^2}$ e. $e_n = (\frac{2+3n}{1+3n})^{2n-1}$
   c. $c_n = (\frac{n+1}{n-1})^{2n+3}$ f. $f_n = (\frac{n^2-1}{n^2+2})^{n^2}$
8. Oprocentowanie na koncie oszczędnościowym w banku B wynosi 10% w skali roku. Na koncie tym obowiązuje roczna kapitalizacja odsetek, tj. kwota złożona na koncie powiększa się o 10% po roku oszczędzania. Pan A zdeponował 1000 zł na koncie oszczędnościowym w tym banku. Zakładamy, że przed upływem 10 lat pan A nie będzie zmieniał stanu konta, tj. nie będzie wpłacał ani wypłacał z niego pieniędzy. Jaka kwota będzie się znajdować na jego koncie po:
   a. dwóch latach oszczędzania
   b. dziesięciu latach oszczędzania
9. Po ilu latach oszczędzania kwota złożona przez Pana A na koncie oszczędnościowym w banku B ulegnie podwojeniu, tj. będzie większa lub równa 2000zł ? Zakładamy, że pan A przed podwojeniem stanu konta w banku B nie będzie wpłacał ani wypłacał żadnych pieniędzy na to konto.
10. Pan X umieszcza w banku B 1 złoty na lokacie. Oprocentowanie w skali rocznej wynosi 100%. Jeżeli odsetki byłyby doliczane po upływie roku, kwota którą pan X otrzymałby po zakończeniu rocznego okresu lokaty wynosiłaby 2 złote. Jeśli odsetki byłyby doliczane po upływie pół roku otrzymałby $(1+\frac{1}{2})^2$ złotego. Obliczyć kwotę, którą pan X otrzymałby po upływie roku w przypadku kapitalizacji:
    a. kwartalnej (po upływie każdego kwartału kwota na lokacie zostaje powiększona o 25%)
    b. miesięcznej (po upływie każdego miesiąca kwota na lokacie zostaje powiększona o $^1/_{12}$)
    c. dziennej (po upływie każdego dnia kwota na lokacie zostaje powiększona o $^1/_{365}$, zakładamy, że rok, w którym kwota jest

wpłacana oraz rok po nim następujący , nie są latami przestępnymi)

Oznaczamy przez e_n kwotę, jaką otrzymałby pan X w przypadku , gdy sposób kapitalizacji odpowiadałby podziałowi roku na n równych przedziałów czasowych.

d. wyznaczyć e_n
e. czy istnieje n takie, że $e_n > 3$

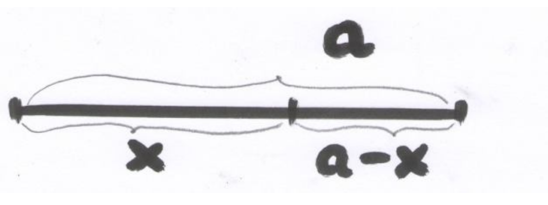
11. Korzystając z rysunku:



obliczyć granicę:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

12. Odcinek o długości a (rys.) należy podzielić na dwie nierówne części tak, aby stosunek odcinka do jego większej części x był równy stosunkowi x do części mniejszej (a-x). Ten stosunek oznaczamy literą φ, a taki podział odcinka nazywamy <u>złotym podziałem</u> (złotą lub boską proporcją). Wyznaczyć liczbę φ. Prostokąt, w którym stosunek boków wynosi φ nazywamy <u>złotym prostokątem</u>.



13.* Wiedząc, że $\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}$=b, wyznaczyć b.