

Zadania z analizy matematycznej dla I roku IB, liGW, IŚ.

Lista 2. Granice i ciągłość funkcji.

1. Obliczyć podane granice.

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7+6x^3}{3-x+x^2}$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7+6x^3}{3-x+x^2}$

c. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{14-7x^2}{3x^2+4x+6}$

d. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^{17} + x^5 + 8x^2 - 5)$

e. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 3x} - \sqrt{x^2 + 1})$

f. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{5x+4}$

g. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{9+3x}{2-x^2}$

h. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+17}{3x+5}\right)^{x+1}$

2. Wiedząc, że $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$ uzasadnić :

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

3. Obliczyć podane granice.

a. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{2x - 6}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 7x)^{1/x}$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\sin 5x}$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{21x} - 1}{7x}$

e. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - 1}{\sin 3x}$

f. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - x^2}{x - 2}$

g. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin 5x}{\sin 9x}$

h. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x}$

i. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + t g x)^{\frac{1}{7x}}$

j. $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \arctg \frac{1}{x}$

k. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5}{x-2}$

l. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+1}{9-x^2}$

m. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^5+32}$

n. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3+x}{4-x^2}$

o. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3+x}{4-x^2}$

p. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{(x-2)^2}$

r. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 1}$

4. Wyznaczyć asymptoty (pionowe, poziome, ukośne) funkcji:

a. $f(x) = \frac{7x+5}{x-3}$

c. $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

b. $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-4}$

5. Zbadać ciągłość funkcji w podanych punktach.

a. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-25}{x+5} & \text{dla } x \neq -5 \\ -10 & \text{dla } x = -5 \end{cases} \quad x_0 = -5$

$$\text{b. } f(x) = \begin{cases} \frac{2^{1/x + \cos x}}{3^{1/x + \frac{1}{2}}} & \text{dla } x < 0 \\ 3^x + 1 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$$

6. Zbadać ciągłość funkcji:

$$\text{a. } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{1 - x} & \text{dla } x \neq 1 \\ -2 & \text{dla } x = 1 \end{cases}$$

$$\text{b. } f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{dla } x < -2 \\ 1 & \text{dla } x = -2 \\ -3x + 4 & \text{dla } x > -2 \end{cases}$$

$$\text{c. } f(x) = \begin{cases} 1 - x - x^2 & \text{dla } x \leq 0 \\ 1 + \log(x + 1) & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$