

Rozkład normalny (Gaussa)

Rozkład z gęstością zadaną wzorem

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2p}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{s}\right)^2\right], \text{ tzn. } P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx. \quad (1)$$

Można obliczyć, że wartość oczekiwana

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{s\sqrt{2p}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{s}\right)^2\right] dx = m$$

zaś wariancja

$$D^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 \frac{1}{s\sqrt{2p}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{s}\right)^2\right] dx = s^2$$

Oznacza to, że wzór (1) opisuje gęstość rozkładu normalnego o średniej μ i odchyleniu standardowym σ , co oznaczamy $X \sim N(\mu, \sigma)$.

Dystrybuanta:

$$F(x) = P(X < x) = \frac{1}{s\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{s}\right)^2\right] dt$$

Standaryzowana zmienna (unormowana) $U \sim N(0,1)$.

Jej dystrybuanta, czyli

$$\Phi(u) = P(U < u) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^u \exp\left[-\frac{1}{2}t^2\right] dt \text{ jest podawana w tablicy.}$$

Zachodzi związek $U = \frac{X-m}{s}$.

Ponieważ $P(X < x) = P\left(\frac{X-m}{s} < \frac{x-m}{s}\right)$ więc

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{s}\right)$$

PRZYKŁAD:

Obliczyć prawdopodobieństwo, że waga losowo wybranego mężczyzny będzie zawarta pomiędzy 68 a 74 kg jeśli wiadomo, że waga mężczyzn w populacji jest zmienną losową X o rozkładzie $N(62,4)$.

Mamy $P(68 < X < 74) = P(1.5 < U < 3) = \Phi(3) - \Phi(1.5) = 0.9987 - 0.9332 = 0.0655$.

Otrzymany wynik oznacza, że 6.5% w populacji ma wagę pomiędzy 68 i 74 kg.

PRZEDZIAŁ UFNOŚCI

Przedział wartości zmiennej losowej w którym z zadany­m prawdopodobieństwem $1-\alpha$ leży szacowany parametr Θ .
 α - poziom istotności (zwykle 0.1, 0.05, 0.001).

Oznacza to, że zachodzi związek $P(a < \Theta < b) = 1 - \alpha$.

FAKT:

Populacja generalna ma rozkład $N(\mu, \sigma)$ o nieznanej wartości średniej μ i odchyleniu standardowym σ . Losujemy próbę o liczebności n elementów. Przedział ufności dla średniej μ z populacji otrzymujemy ze wzoru

$$P\left(\bar{x} - t_{\alpha} \frac{s}{\sqrt{n-1}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha} \frac{s}{\sqrt{n-1}}\right) = 1 - \alpha, \quad (2)$$

gdzie

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} - \text{odchylenie standardowe z próby},$$

t_{α} - wartość zmiennej t Studenta odczytana z tablicy tego rozkładu dla $n-1$ stopni swobody tak by spełniona była relacja $P(-t_{\alpha} < t < t_{\alpha}) = 1 - \alpha$.

PRZYKŁAD:

Wytrzymałość materiału jest zm. losową $N(\mu, \sigma)$. Pomierzono 5 próbek i otrzymano wyniki: 20.4, 19.6, 22.1, 20.8, 21.1.

Dla poziomu istotności $\alpha=0.01$ zbudować przedział ufności dla średniej wytrzymałości materiału.

Obliczamy $\bar{x} = 20.8$ i $s=0.82$ i z tablic rozkładu t -Studenta znajdujemy dla 4 stopni swobody dla $\alpha=0.01$ wartość $t_{\alpha}=4.6041$.

Wstawiając to do wzoru (2) otrzymamy przedział $[18.9, 22.7]$