

MATEMATYKA II

LISTA 2

1. Znaleźć parametry a i b tak aby funkcje

$$a) f(x) = \begin{cases} a \cdot e^x + b & \text{dla } x \leq 0 \\ 2 - x & \text{dla } x > 0 \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{dla } x \leq 0 \\ a \sin x + b \cos x & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

były ciągłe i różniczkowalne na R .

2. Znaleźć przedziały monotoniczności funkcji

$$a) f(x) = e^x (x + 1) \quad b) y = x \ln^2 x \quad c) y = x^4 e^{-3x}$$

3. Wyznaczyć ekstrema funkcji

$$a) f(x) = 4x + \frac{1}{x} \quad b) f(x) = \frac{1}{x \ln x} \quad c) y = \frac{x^3}{3 - x^2}$$

4. Obliczyć granice korzystając z reguły de L'HOSPITALA

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^x + 1)}{x} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctgx} \right) \quad c) \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x)^{\ln x} \quad d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{\sin 2x} \quad e) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x} \right)$$

5. Określić przedziały wypukłości oraz punkty przecięcia funkcji

$$a) f(x) = x e^{-x} \quad b) f(x) = \frac{1}{1 - x^2} \quad c) f(x) = \ln(1 + x^2)$$

6. Zbadać przebieg zmienności funkcji i sporządzić wykres

$$a) f(x) = x \ln x \quad b) y = x^2 e^{-x} \quad c) y = \frac{\sqrt{x}}{x - 1}$$

7. W półkule o promieniu $R=2$ wpisano walec o największej objętości. Znaleźć wymiary tego walca.

8. Lejek ma kształt stożka o tworzącej $l=10$ cm. Jakie wymiary powinien mieć lejek aby jego objętość była maksymalna ?

9. Jakiej wielkości kwadraty należy wyciąć na rogach prostokątnego arkusza kartonu o wymiarach $a = 30$ cm, $b = 24$ cm, aby pojemność pudełka otrzymanego po sklejeniu kwadratu była największa ?