Zadania z analizy matematycznej dla I roku IB, IiGW, IŚ.

Lista 3. Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej.

1. Korzystając z definicji obliczyć pochodne podanych funkcji we wskazanych punktach.
   a. f(x)=$x^2 + 8;\ x_0$=1 c. f(x)=$|x + 4|;\ x_0$=-4
   b. f(x)=$\frac{1}{x};\ x_0$=-2 d. f(x)=$x^2;\ x_0 \in \mathbb{R}$
2. Korzystając z reguł różniczkowania obliczyć pochodne podanych funkcji.
   a. f(x)=$6^x - 2cosx + tg\,\frac{\pi}{12}$
   b. f(x)=$e^x(7x^3 + 3x^2 + 8x + 6)$
   c. f(x)=$7x^5 5^x$
   d. f(x)=$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$
   e. f(x)=$\frac{2x+3}{x^2+4}$
   f. f(x)=$4^x(x^2 + 5)cosx$
   g. f(x)=$\frac{x^4+x^2+1}{x^4-x^2+1}$
   h. f(x)=$\frac{1}{x^2-x}$
   i. f(x)=$\frac{x}{x^2+8}$
   j. f(x)=$x + \frac{1}{x}$
   k. f(x)=$(5x + 8)^3(sinx)^{114}$
   l. f(x)=$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$
   m.$f(x) = x^2e^{1/x}$
   n. f(x)=$(x^9 + 5x^2 + 3x)^{2015}$
   o. f(x)=$\sqrt{x^6 + 3x^4 + 5}$
   p. f(x)=sin^2x; g(x)=$sinx^2$
   q. f(x)=$\frac{x^3sinx}{x^2+6}$
   r. f(x)=$\frac{x^2-\sqrt{x}}{2^x}$
   s. f(x)=$5^{e^{7x}}$
   t. f(x)=$(\sqrt{x})^{e^x}$
3. Wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji:
   a. f(x)=$2x^3 - 15x^2 + 36x - 14$
   b. f(x)=$\frac{1}{x^2-x}$
   c. $f(x) = e^x(x + 2)$
   d. $f(x) = 2 - 2|x + 5|$
   e. f(x)=$\frac{x}{x^2+4}$
   f. f(x)=$x + \frac{1}{x}$
   g. $f(x) = xln^2x$
   h. $f(x) = 2arctgx - \ln(x^2 + 1)$
   i. f(x)=$x^2e^{\frac{1}{x}}$
4. Wyznaczyć przedziały wypukłości oraz punkty przegięcia podanych funkcji.
   a. f(x)=$2x^3 - 15x^2 + 36x - 14$
   b. f(x)=$\frac{1}{1-x^2}$
   c. $f(x) = xe^{-x}$

5. Zbadać przebieg zmienności podanych funkcji i następnie sporządzić ich wykresy.
    a. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ c. $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$
    b. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ d. $f(x)=\frac{2x^3}{x^2-4}$
6. Znaleźć wartości najmniejsze i największe podanych funkcji na wskazanych przedziałach.
    a. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x - 8$; [-3,6]
    b. $f(x) = x - 2\sqrt{x}$; [0,5] c. $f(x) = \frac{lnx}{\sqrt{x}}$; $x \in [1, e^4]$
7. Z kartonu w kształcie półkola o promieniu r=4 należy wyciąć prostokąt o maksymalnie największym polu. Podać wymiary tego prostokąta.
8. W kulę o promieniu R=2 wpisano walec o największej objętości. Znaleźć wymiary tego walca.
9. Z prostokątnego kawałka blachy o szerokości a należy wygiąć rynnę o przekroju prostokątnym w ten sposób, aby mogło nią spłynąć możliwie najwięcej wody. Znaleźć wymiary przekroju rynny.
10. Napisać równania stycznych i normalnych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach.
    a. $f(x)=x^3 - 2x^2 - 3x + 1$; (-1,f(-1)) c. $f(x)=\frac{e^x}{x+1}$; $(1, f(1))$
    b. $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$; $(\sqrt{2}, f(\sqrt{2}))$ d. $f(x)=\frac{lnx}{x}$; (e,f(e))
11. Stosując regułę de L'Hospitala (sprawdzić odpowiednie założenia) obliczyć granice.
    a. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^{10}-1}$
    b. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} + 3x}{x}$
    c. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{sin3x}$
    d. $\lim_{x\to \infty} \frac{e^x-2}{x^3}$
    e. $\lim_{x\to \infty} x^2 e^{-x}$
    f. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(sinx)}{\ln(sin2x)}$
    g. $\lim_{x\to 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1})$
    h. $\lim_{x\to 1^+} (x-1)\ln(x-1)$
    i. $\lim_{x\to \infty} (\frac{2}{\pi} arctgx)^x$
    j. $\lim_{x\to 2^+} ln(\frac{1}{x-2})^{x-2}$
    k. $\lim_{x\to 0^+} xlnx$
    l. $\lim_{x\to 5^+} (x-5)e^{\frac{1}{x-5}}$
12. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżone wartości podanych wyrażeń.
    a. $\sqrt[3]{7{,}999}$ b. $\frac{1}{\sqrt{3{,}98}}$ c. $\arcsin(0{,}51)$