

LICZBY ZESPOLONE

1. Dane są liczby zespolone: $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 2i - 3$, $z_3 = -3i$. Oblicz:

a) $2z_1 - z_2$ b) $z_1 \cdot \bar{z}_2$ c) $\frac{z_1 + z_3}{z_2}$ d) $z_2^2 \cdot z_3 - z_1$

2. W zbiorze liczb zespolonych rozwiąż równania

a) $z^2 + 3\bar{z} = 0$ b) $\frac{z+1}{\bar{z}-1} = -1$ c) $(z + \bar{z}) + i(z - \bar{z}) = 2i - 6$

3. Rozwiąż równanie: $(-2 + i)x + (5 + 3i)y = 3 + i$

4. Podane liczby zespolone zapisać w postaci trygonometrycznej

a) $z = -3i$ b) $z = \sqrt{3} - i$ c) $z = -3 - 3\sqrt{3}i$ d) $z = -4$ e) $z = -1 + \frac{1}{\sqrt{3}}i$
f) $z = \frac{-\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$ g) $z = \frac{2}{i}$

5. Podane liczby zespolone zapisać w postaci algebraicznej

a) $z = 2(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi)$ b) $z = \sqrt{3}(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi)$ c) $z = 3(\cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi)$
d) $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi)$

6. Obliczyć wartości podanych wyrażeń. Wynik podać w postaci algebraicznej.

a) $(-\sqrt{3} + i)^7$ b) $(2 - 2\sqrt{3}i)^{21}$ c) $\left(\frac{1}{1+i}\right)^{13}$ d) $\left(i\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{17}$

7. Udowodnić, że dla dowolnych liczb zespolonych z_1, z_2 zachodzą związki:

a) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ c) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
d) $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ e) $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$

8. Obliczyć i narysować na płaszczyźnie zespolonej podane pierwiastki

a) $\sqrt{-3i}$ b) $\sqrt[4]{-1}$ c) $\sqrt[3]{-1+i}$ d) $\sqrt[6]{-64}$ e) $\sqrt[4]{1-i\sqrt{3}}$

9. Korzystając ze wzoru Moivre'a wyrazić

a) $\cos 3x$ za pomocą funkcji $\cos x$
b) $\sin 4x$ za pomocą funkcji $\sin x$

10. W zbiorze liczb zespolonych rozwiąż równanie

a) $z^3 + i = 0$ b) $z^2 - 2iz + 3 = 0$ c) $z^2 = 9\bar{z}$ d) $iz^3 = 1 + i$ e) $(z + 1)^2 = (\bar{z}^2 + 1)^2$
f) $z^5 + 2z^3 + z = 0$ g) $z^3 + z^2 + 7z + 7 = 0$

11. Narysować zbiór liczb zespolonych z , dla których

a) $\pi < \arg(z^3) < \frac{3}{2}\pi$ b) $\arg(iz) = \frac{\pi}{4}$

12. Na płaszczyźnie zespolonej zarysować zbiory liczb z spełniających podane warunki

a) $Re(z) \leq 2$ b) $Im(z) \cdot Re(z) = 1$ c) $\begin{cases} 1 < |z| \leq 2 \\ 0 < \arg(z) < \frac{\pi}{4} \end{cases}$ d) $\begin{cases} |z - 1| < 1 \\ \arg(z) = \frac{\pi}{6} \end{cases}$
e) $3Re(z) + 2Im(z) < 1$

13. Podaj moduł i argument liczby zespolonej

b) $z = \frac{(1+i\sqrt{3})^{13}}{(1-i)^{21}}$ b) $z = (\sqrt{3} + i)^9 \cdot (1 - i)^5$ c) $z = \frac{(\sqrt{3}-i)^{13}}{(i-1)^7}$

14. Znajdź postać algebraiczna liczby zespolonej

a) $z = \frac{(1+\sqrt{3}i)^8}{(i-1)^6}$ b) $z = \frac{1-i}{i^7}$ c) $z = \frac{(1-i)^7}{(1+i)^3}$

15. Oblicz $\sqrt{1 + 2i}$. Wynik podaj w postaci algebraicznej.

16. Rozwiąż równanie

a) $z^3 = (1 - 2i)^6$ b) $z^4 = \frac{-18}{1+i\sqrt{3}}$

ZADANIA DODAKTOWE

1. Obliczyć $(1 + \cos x + i \sin x)^n$ $n \in N$ WSK: Wzór Moivre'a.
2. Wyprowadzić wzór na wyrażenie $\sin x + \sin 2x + \dots + \dots + \sin nx$
WSK: Oblicz $1 + z + z^2 + \dots + z^n$ dla $z = \cos x + i \sin x$