

Pojęcie funkcji. Funkcja liniowa

dr Mariusz Grządziel

Wykład 2; rok akademicki 2015/2016

1 Matematyka w naukach przyrodniczych

Zależności funkcyjne w naukach przyrodniczych

Rozwój algebry i analiza matematycznej w 16 i 17 wieku: opis zjawisk takich jak:

- ruch jednostajnie przyspieszony; Droga s , jaką przemierzy kulka ołowiana upuszczona z wysokiej wieży po czasie t :

$$s = \frac{gt^2}{2},$$

gdzie $g \approx 9,81 \frac{m}{s^2}$;

- eliptyczne trajektorie, po których poruszają się planety;
- wychylenie wahadła w zależności od czasu (przy małym kącie wychylenia początkowego).

Rachunek różniczkowy i całkowy — narodziny fizyki klasycznej (newtonowskiej)

Jeśli prędkość v punktu materialnego dana jest wzorem $v(t) = gt$, łatwo jest obliczyć:

- drogę przebytą na przedziale czasowym $[t_1, t_2]$, $t_1, t_2 \geq 0$ (jest ona równa polu trapezu: $\frac{g}{2}(t_2^2 - t_1^2)$);
- przyspieszenie: jest ono równe g .

Problem: w jaki sposób wykonywać analogiczne obliczenia, gdy funkcja $v = v(t)$ ma bardziej skomplikowaną postać? Np. gdy $v(t) = t^2$?

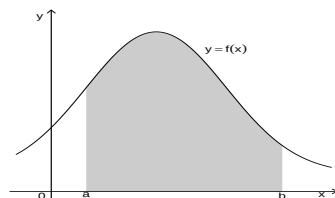
- Niezbędne jest skorzystanie z pojęć i metod *rachunku różniczkowego i całkowego*.
- pojęcie pochodnej, całki oznaczonej, twierdzenie Newtona-Leibniza: rozwój fizyki klasycznej w XVII i XVIII wieku.

Pole trapezu krzywoliniowego

Założmy, że funkcja f jest nieujemna i ciągła na przedziale $[a, b]$ (czyli jej wykres można „narysować bez odrywania ręki”). Figurę ograniczoną wykresem funkcji f oraz prostymi: $x = a$, $x = b$ i $y = 0$ będziemy nazywać trapezem krzywoliniowym *odpowiadającym odcinkowi $[a, b]$ i funkcji f* .

Pole (wyżej określonego) trapezu krzywoliniowego: całka na przedziale $[a, b]$ z f : notacja $\int_a^b f(x) dx$.

Interpretacja fizyczna: droga przebyta przez punkt materialny poruszający się z prędkością $v = f(t)$, $f(t) \geq 0$, na odcinku czasowym $[a, b]$.



Rysunek 1: Trapez krzywoliniowy

Pojęcie funkcji

Kluczowym pojęciem w analizie matematycznej (i naszym kursie) jest pojęcie funkcji.

Definicja 1. Niech będą dane dwie zmienne x i y o obszarach zmienności $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$. Zmienna f jest funkcją zmiennej x w jej obszarze zmienności $\mathcal{X}$ jeśli istnieje prawo przypisujące każdej wartości x dokładnie jedną wartość y (z $\mathcal{Y}$).

Obszar zmienności $\mathcal{X}$ może być np. przedziałem lub podzbiorem płaszczyzny.

Funkcje jednej zmiennej

Definicja 2 (funkcji jednej zmiennej). Funkcją (jednej zmiennej) określoną na zbiorze $X \subset \mathbb{R}$ o wartościach w zbiorze $Y \subset \mathbb{R}$ nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi $x \in X$ dokładnie jednego elementu $y \in Y$. Funkcję taką oznaczamy $f: X \rightarrow Y$. Wartość funkcji f w punkcie x oznaczamy przez $f(x)$.

Definicja 3 (dziedziny i zbioru wartości). Niech $f: X \rightarrow Y$. Wtedy zbiór X nazywamy dziedziną funkcji f i oznaczamy przez D_f , a zbiór wartości funkcji f oznaczamy przez W_f . Jeżeli dany jest tylko wzór określający funkcję, to zbiór tych elementów z $\mathbb{R}$, dla których wzór ten ma sens, nazywamy dziedziną naturalną funkcji.

Definicja 4 (równości funkcji). Mówimy, że dwie funkcje są sobie równe, jeśli: (i) ich dziedziny są sobie równe; (ii) dla wszystkich elementów (wspólnej) dziedziny przybierają równe wartości.

Przykłady. (i) funkcje $f(x) = 1 + x$, $g(x) = \frac{1-x^2}{1-x}$ nie są sobie równe- ponieważ ich dziedziny naturalne D_f i D_g nie są sobie równe (g jest zawężeniem funkcji f do zbioru $M = \mathbb{R} \setminus \{1\}$).

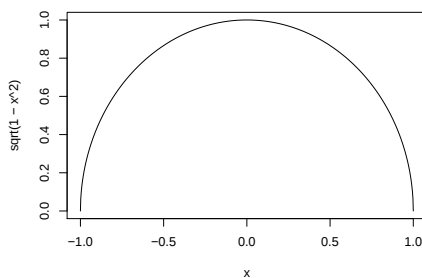
(ii) funkcje $f(x) = x^2$ i $g(x) = \sqrt{x^4}$ są sobie równe.

Zawężenie funkcji

Dla funkcji $f: X \rightarrow Y$ można określić jej zawężenie, nazywane też obcięciem lub ograniczeniem, do zbioru $M \subset X$. Jest to funkcja $f|_M(x): X \rightarrow Y$ taka, że $f|_M(x) = f(x)$ dla każdego $x \in M$.

Definicja 5 (wykresu funkcji). Wykresem funkcji $f: X \rightarrow Y$ nazywamy zbiór par $(x, f(x))$ utworzony dla wszystkich elementów x zbioru X .

Przykład. Dla funkcji $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ wykresem jest „górna połówka okręgu” o środku w początku układu współrzędnych i o promieniu 1



Rysunek 2: Wykres funkcji $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Funkcja liniowa

Dla danych $a, b \in \mathbb{R}$ funkcję liniową f definiujemy wzorem:

$$f(x) = ax + b. \quad (1)$$

Współczynnik a nazywamy współczynnikiem kierunkowym prostej, a współczynnik b wyrazem wolnym.

Prosta MNK

Problem: do danych empirycznych chcemy dopasować funkcję liniową $f(x) = ax + b$ w sensowny „sposób”.

Przykład Dane przedstawiają pomiary cech: x i y (x może oznaczać zmierzony czas, a y położenie punktu materialnego — jego współrzędną poziomą).

x	-1.0	2.0	5.0	6.0	8.0	10.0
y	1.0	-1.0	8.0	4.0	11.0	10.0

W ogólnym przypadku: mamy n pomiarów $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$.

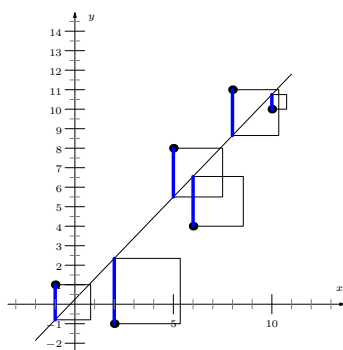
Prosta MNK — c.d.

Innymi słowy: szukamy współczynników a, b takich, aby suma S

$$S(a, b) \equiv \sum_{k=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$$

była minimalna. Zauważmy, że S jest funkcją dwóch zmiennych! Jeśli nie wszystkie x_i są równe tej samej liczbie, współczynniki a i b spełniające ten warunek są równe:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$



Rysunek 3: Prosta MNK jest dobrana tak, aby suma pól kwadratów przedstawionych na rysunku była minimalna

oraz

$$b = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i \right),$$

gdzie

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i.$$

Dla danych z przykładu: $a = 1,05$, $b = 0,25$.