

Ciągi liczbowe — wykład 3

dr Mariusz Grządział

13 kwietnia 2013

Definicja 1 (ciągu liczbowego). *Ciągiem liczbowym nazywamy funkcję odwzorowującą zbiór liczb naturalnych w zbiór liczb rzeczywistych. Wartość tej funkcji dla liczby naturalnej n nazywamy n -tym wyrazem ciągu i oznaczamy przez a_n , b_n itp. Ciągi o takich wyrazach oznaczamy odpowiednio przez (a_n) , (b_n) itp. Zbiór wyrazów ciągu (a_n) oznaczamy przez $\{a_n\}$.*

Uwaga 1 Niektórzy autorzy definiujemy ciąg jako funkcję określoną na dowolnym podziorze liczb naturalnych.

Uwaga 2 W książce D. Wrzosa ciąg o wyrazach $a_n, n \in \mathbb{N}$ oznaczany jest przez $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Sposoby określania ciągu

Ciągi liczbowe możemy określać:

(i) wzorem: np.

$$a_n = 3^n.$$

(ii) opisowo

a_n — n -ta cyfra po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby π ;

(iii) rekurencyjnie: wyraz $(n+1)$ -szy jest określony jako funkcja początkowych n wyrazu ciągu; np. ciąg arytmetyczny (a_n) , którego pierwszy wyraz jest równy 1 i różnica r jest równa 2, może być określony rekurencyjnie w następujący sposób:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 2$$

— por. [Wrz08, str. 109].

Ciąg geometryczny

Definicja 2. Ciąg (a_n) określony przez

$$a_1 = a, a_{n+1} = qa_n,$$

gdzie a i q są danymi liczbami rzeczywistymi, nazywamy ciągiem geometrycznym o pierwszym wyrazie a i ilorazie q .

Przykład 1. W chwili $t = 1$ liczebność populacji bakterii wynosi 1000. Po upływie czasu T liczebność populacji bakterii się podwaja. Przyjmując T za jednostkę pomiaru czasu liczebność populacji a_n w chwili $t = n$ można określić wzorem:

$$a_1 = 1000; \quad a_{n+1} = 2a_n.$$

Definicja 3. Ciąg (a_n) jest ograniczony z dołu, jeżeli zbiór $\{a_n\}$ jest ograniczony z dołu, tj. istnieje $m \in \mathbb{R}$ takie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \geq m.$$

Definicja 4 (ciągu ograniczonego z góry). Ciąg (a_n) jest ograniczony z góry, jeżeli zbiór $\{a_n\}$ jest ograniczony z góry, tj. istnieje $M \in \mathbb{R}$ takie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \leq M.$$

Przykład

Ciąg $b_n = \frac{n}{n+3}$ jest ograniczony z góry- ograniczeniem górnym jest np. 1.

Definicja 5 (ciągu ograniczonego). Ciąg (a_n) jest ograniczony, jeżeli zbiór $\{a_n\}$ jest ograniczony, tj. ma zarówno ograniczenie dolne jak i górne.

Przykład

Ciąg

$$a_n = \frac{n}{n^2 + 1}$$

jest ograniczony. Ograniczeniem dolnym jest np. 0 a ograniczeniem górnym np. 1.

Definicja 6. Ciąg (a_n) jest rosnący, jeżeli

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots, \text{ tzn. dla każdego } n \in \mathbb{N} \quad a_n < a_{n+1}.$$

Analogicznie definiujemy ciąg niemalejący:

Definicja 7. Ciąg (a_n) jest niemalejący, jeżeli

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots, \text{ tzn. dla każdego } n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq a_{n+1}.$$

Uwaga. Analogicznie definiuje się ciąg malejący i nierosnący.

Ciąg nazywamy monotonicznym, jeżeli jest nierosnący lub niemalejący.

Pojęcie granicy ciągu

Rozważmy ciąg (a_n) określony przez $a_n = \frac{1}{n}$. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ wszystkie, z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby, wyrazy tego ciągu należą do epsilonowego otoczenia zera $(0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon)$.

Zamiast wszystkie z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby będziemy często pisać prawie wszystkie.

Definicja 8 (słowne określenie granicy właściwej ciągu). Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy właściwej $a \in \mathbb{R}$, jeśli w dowolnym otoczeniu epsilonowym a znajdują się prawie wszystkie wyrazy tego ciągu.

Pojęcie granicy ciągu — c.d.

Definicja 9 (granicy właściwej ciągu). Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy właściwej $a \in \mathbb{R}$, co zapisujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego n naturalnego większego niż n_0

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Równość

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

często jest zapisywana krócej: $\lim a_n = a$ lub $a_n \rightarrow a$.

Granica ciągu — przykład

Zadanie. Korzystając z definicji granicy uzasadnij, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Rozw. Mamy pokazać, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n > n_0$

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Musimy znaleźć liczbę $n_0 \in \mathbb{N}$ taką, że dla każdego $n > n_0$ będzie spełniona nierówność $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$. Mamy

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Zatem za n_0 można przyjąć dowolną liczbę naturalną większą niż $\frac{1}{\varepsilon}$.

Granica — zastosowania geometryczne

Problem. Chcemy obliczyć pole s figury S ograniczonej prostą $y = 0$, prostą $x = 1$ i wykresem funkcji $f(x) = x^2$.

Rozwiązanie przybliżone. Dzielimy odcinek $[0, 1]$ na n odcinków o równej długości:

$$\left[0, \frac{1}{n}\right), \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \dots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right].$$

Suma pól prostokątów, których podstawy są równe tym odcinkom a wysokości kwadratami ich lewych końców, oznaczana przez s_n , jest sensownym przybliżeniem pola figury S .

Pole figury S można zdefiniować jako $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$.

„Przykład geometryczny” — c.d.

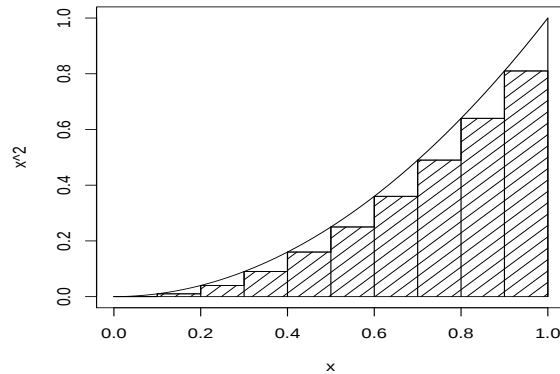
Mamy

$$s_n = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{n} \times \left(\frac{k-1}{n} \right)^2 \right] = \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6};$$

wykorzystaliśmy równość:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Obliczenie granicy ciągu (s_n) bezpośrednio z definicji — raczej trudne.



Rysunek 1: Przybliżony sposób obliczania pola figury S

Twierdzenie 1 (o arytmetyce granic ciągów). *Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy właściwej a oraz ciąg (b_n) jest zbieżny do granicy właściwej b , to*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b, \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b, \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = ca, \text{ gdzie } c \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab, \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = a/b, \text{ o ile } b \neq 0, \quad (5)$$

„Przykład geometryczny”— c.d.

Korzystając z twierdzenia o arytmetyce granic ciągów możemy obliczyć granicę ciągu (s_n) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \quad (6)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \quad (7)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2} = \quad (8)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{6n^2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{6n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6n^2} = \quad (9)$$

$$= \frac{1}{3} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6n^2} = \frac{1}{3}. \quad (10)$$

Przy obliczeniach zostało wykorzystane Twierdzenie o arytmetyce granic ciągów.

Paradoks Zenona z Elei — wersja uwspółcześniona

Zenek goni Andrzeja: prędkość Andrzeja $v_A = 10 \frac{m}{s}$, prędkość Zenka: $v_Z = 5 \frac{m}{s}$.
W czasie:

$$\begin{aligned} t_0 = 0 : s_A(t_0) &= 0; s_Z(t_0) = 10; \\ t_1 = 1 : s_A(t_1) &= 10; s_Z(t_1) = 15; \\ t_2 = 1,5 : s_A(t_2) &= 15; s_Z(t_2) = 17,5 \\ &\dots \end{aligned}$$

To postępowanie można kontynuować w nieskończoność. Czy Zenek nigdy nie złapie Andrzeja?

Suma kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego

$$s_A(t_k) = 10 + 10 \times \frac{1}{2} + \dots + 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}.$$

Czy $s_A(t_k)$ dąży do nieskończoności? Mamy:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_A(t_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} 10 \frac{\frac{1}{2^k} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 20 - 20 \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 20,$$

$$\text{bo } \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 0.$$

Granica ciągu geometrycznego dla ilorazu $q \in (-1, 0) \cup (0, 1)$

Fakt. Niech $q \in (-1, 0) \cup (0, 1)$. Wtedy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} q^k = 0.$$

Dowód. Weźmy dowolny $\epsilon > 0$. Należy znaleźć $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n > n_0$

$$|q^n - 0| < \epsilon.$$

Mamy

$$|q^n - 0| = |q^n| = |q|^n < \epsilon \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } n > \log_{|q|} \epsilon,$$

więc można za n_0 przyjąć najmniejszą liczbę całkowitą większą lub równą $\log_{|q|} \epsilon$.

Szeregi nieskończone — definicje

Dla ciągu (a_n) , o wyrazach $a_1, a_2, a_3, \dots$ utwórzmy następujący ciąg:

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots$$

Jeżeli ciąg (s_n) ma granicę, to granicę tę oznaczamy symbolem

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

i nazywamy ją sumą szeregu nieskończonego $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$

Przykłady

- Dla $q \in (-1, 1)$ i $a \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q};$$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$;
- $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n = \infty$; (szereg jest rozbieżny do granicy niewłaściwej ∞ ; dokładna definicja ciągu rozbieżnego do ∞ : [Kur08, str. 31]);
- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = \infty$ nie jest zbieżny do żadnej granicy (skończonej lub nieskończonej; jest rozbieżny).

Przykłady — c.d.

Jesteśmy zainteresowani obliczeniem sumy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \quad (11)$$

Ciąg sum częściowych jest ograniczony, ponieważ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.
Prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2. *Ciąg niemalejący i ograniczony z góry jest zbieżny.*

Stąd suma (11) jest zbieżna do pewnej granicy g . Łatwo pokazać, że $g < 2$. Używając bardziej zaawansowanych metod można udowodnić, że $g = \pi^2/6$ (por. [Kur08, str. 231]).

Liczba e

Rozważmy ciąg

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Można sprawdzić, że:

$$e_1 = 2; \quad e_2 = 2,25; \quad e_{10} = 2,594; \quad e_{100} = 2,705.$$

Fakt. Można pokazać, że ciąg (e_n) jest rosnący.

Fakt. Dla każdego n zachodzi $e_n \leq 3$.

Z powyższych faktów, oraz z twierdzenia, które mówi, że ciąg rosnący i ograniczony z góry jest zbieżny (por. G. Fichtenholz, rachunek różniczkowy i całkowy, t.1, rozdz. 34), wynika, że

Twierdzenie 3. *Ciąg*

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

jest zbieżny.

Granice tego ciągu będziemy oznaczać przez e (od matematyka szwajcarskiego L. Eulera (1707-1783)):

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Liczba e z dokładnością do 10 cyfr po przecinku jest równa

$$2,7182818285.$$

Liczba e — inna definicja

$$e \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Dowód równoważności tej definicji z podaną poprzednio: ćwiczenia.

Obliczanie przybliżonej wartości liczby e

Oznaczmy

$$s_n \equiv \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}.$$

Mamy:

$$e - s_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots \leq \quad (12)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \right] = \frac{1}{n!n}, \quad (13)$$

więc

$$0 < e - s_n < \frac{1}{n!n}.$$

Stąd np. s_7 przybliża liczbę e z błędem mniejszym niż 10^{-4} (ponieważ $7! \cdot 7 = 35280$).

Logarytm naturalny i funkcja eksponencjalna

Logarytm przy podstawie e nazywamy logarytmem naturalnym i oznaczamy przez $\ln$; $\ln x = \log_e x$. Funkcję wykładniczą przy podstawie e nazywamy funkcją eksponencjalną i oznaczamy $\exp$; $\exp x = e^x$.

Funkcja eksponencjalna jako suma szeregu potęgowego

Dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots \quad (14)$$

Dowód można znaleźć np. w [Kur08, str. 142].

Wniosek W otoczeniu $(-\epsilon, \epsilon)$, gdzie ϵ jest odpowiednio „małą” liczbą dodatnią, wykres funkcji $y = e^x$ może być przybliżony („sensownie”) przez wykres funkcji $y = 1 + x$. W szczególności, wykres funkcji $y = e^x$ przecina oś OY pod kątem 45 stopni; funkcja wykładnicza dla $y = a^x$, gdzie $a \neq e$, nie posiada tej własności.

Uwaga Równość (14) może być wykorzystana do zdefiniowania funkcji wykładniczej dla argumentu postaci $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, a $i = \sqrt{-1}$ jest „jednostką urojoną”.

Szereg harmoniczny

Definicja 10. Mówimy, że ciąg (a_n) jest zbieżny do ∞ , jeżeli dla każdej liczby r istnieje takie n_0 , że dla $n > n_0$ jest $a_n > r$.

Można pokazać, że ciąg sum częściowych (tzw. szereg harmoniczny)

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

jest zbieżny do nieskończoności.

Dowód ćwiczenia.

Wskazówki bibliograficzne

Strona w encyklopedii Wikipedia poświęcona paradoksom Zenona z Elei:

http://pl.wikipedia.org/wiki/Paradoksy_Zenona_z_Elei

[Fich78] G. Fichtenholz, Rachunek różniczkowy i całkowy. Tom 1. PWN 1978.

[Kur08] K. Kuratowski, Rachunek różniczkowy i całkowy. Wydanie 11. PWN 2008.

[Wrz08] D. Wrzosek, Matematyka dla biologów. Wyd. UW, 2008; wydanie 2-gie ukażało się w 2010 r.