

Pochodna funkcji: zastosowania przyrodnicze — wykład 5

dr Mariusz Grządziel

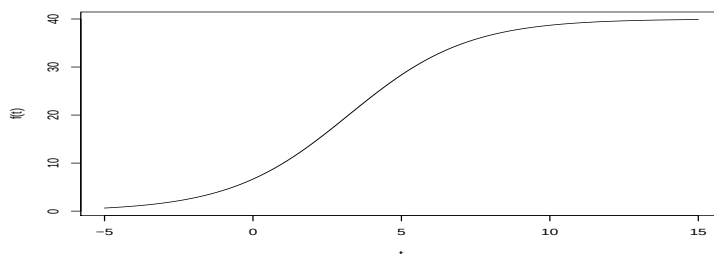
18 maja 2013

Funkcja logistyczna

Rozważmy funkcję logistyczną $y = f_0(t) = \frac{40}{1+5e^{-0,5t}}$.

Funkcja f może być wykorzystana np. do modelowania wzrostu masy ziaren kukurydzy. Zmienna t oznaczać mogłaby czas wegetacji mierzony w tygodniach, a zmienna y masę 100 ziaren kukurydzy, wyrażoną w gramach, por. A. Dąbrowski i in., *15 godzin z pakietem Statgraphics*, Wyd. AR Wrocław, 1993, rozdz. 11.

Funkcja logistyczna – c.d.



Rysunek 1: Wykres funkcji $y = f_0(t) = \frac{40}{1+5e^{-0,5t}}$

Chcemy: (a) obliczyć pochodną funkcji f_0 w punkcie $x_0 = 5$, (b) znaleźć punkt, w którym tempo wzrostu funkcji f_0 „przestaje rosnąć”.

Funkcja logistyczna

Funkcja logistyczna: ogólna postać:

$$f(t) = \frac{a}{1 + be^{-ct}}.$$

Zastosowania: modelowanie wzrostu populacji zwierząt, wzrostu masy roślin, zmiany w popycie na niektóre artykuły wprowadzane na rynek.

Dziedziną naturalną funkcji f jest $\mathbb{R}$, ale w zastosowaniach przyjmujemy $D_f = [0, \infty)$.

Prędkość wzrostu w chwili t_0 – wartość przybliżona

Chcąc znaleźć wartość przybliżoną prędkości wzrostu funkcji f_0 w chwili $t_0 = 5$ można obliczyć iloraz

$$\frac{f_0(5 + \Delta x) - f_0(5)}{\Delta x}, \quad (1)$$

gdzie Δx jest równa np. 0,01 lub 0,001.

Można sprawdzić, że wyrażenie (1) dla $\Delta x = 0,01$ jest równe 4,122012 a dla $\Delta x = 0,001$ jest równe 4,125897.

Wyrażenie (1), tzw. iloraz różnicowy; jego granica przy $\Delta x \rightarrow 0$: pochodna funkcji f_0 w $x_0 = 5$.

Iloraz różnicowy

Definicja 1. Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na odcinku $(x_0 - r, x_0 + r)$, gdzie $r > 0$, oraz przyrost Δx niech będzie liczbą spełniającą nierówność $0 < |\Delta x| < r$. Ilorazem różnicowym funkcji f w punkcie x_0 odpowiadającym przyrostowi Δx nazywamy liczbę

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$: przyrost wartości funkcji f odpowiadający przyrostowi Δx .

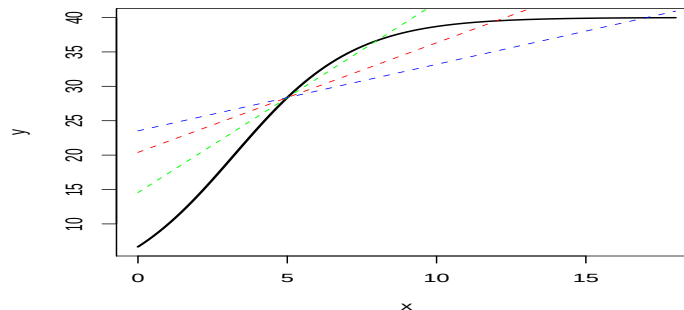
Interpretacja geometryczna ilorazu różnicowego

Iloraz różnicowy jest równa współczynnikowi kierunkowemu prostej przechodzącej przez punkty $(x_0, f(x_0))$ i $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ (tzw. siecznej).

Interpretacja geometryczna ilorazu różnicowego— c.d.

Interpretacja geometryczna pochodnej

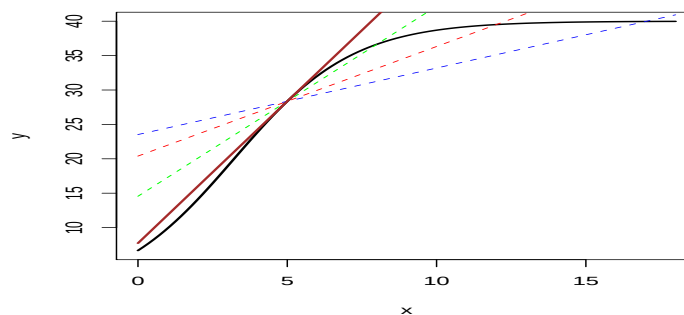
Definicja 2 (stycznej do wykresu funkcji). Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja ciągła f będzie określona przynajmniej na otoczeniu x_0 . Prosta jest styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$, jeżeli jest granicznym położeniem siecznych funkcji f przechodzących przez punkty $(x_0, f(x_0))$, $(x, f(x))$, gdy $x \rightarrow x_0$.



Rysunek 2: Sieczne do funkcji f_0 dla $x_0 = 5$ i wartości $\Delta x = 3, 7$, i 12 .

Geometrycznie styczna jest prostą, która w sąsiedztwie punktu styczności „najlepiej” przybliża wykres funkcji. Nie jest prawdą, że każda prosta która ma tylko jeden punkt wspólny z wykresem jest do niego styczna.

Interpretacja geometryczna pochodnej- c.d.



Rysunek 3: Styczna jako graniczne położenie siecznych

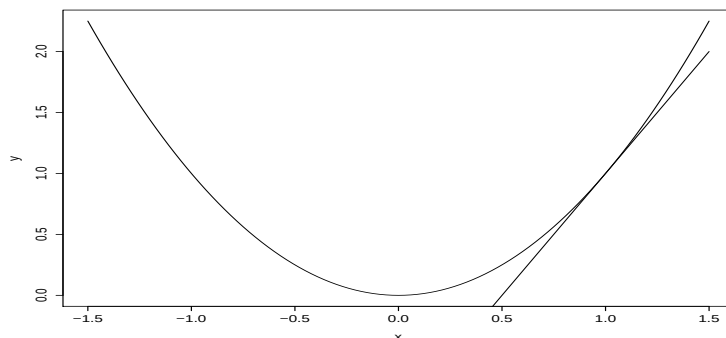
Styczna do wykresu

Równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ ma postać:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Przykład Dla funkcji f określonej wzorem $f(x) = x^2$ równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(1, 1)$ ma postać:

$$y = 1 + f'(1)(x - 1) = 1 + 2(x - 1) = 2x - 1.$$



Rysunek 4: Styczna do funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie $(1, 1)$.

Pochodne ważniejszych funkcji elementarnych

Wzór	Zakres zmienności
$(c)' = 0$	$c \in \mathbb{R}$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$n \in \mathbb{N}$ oraz $x \in \mathbb{R}$
$(x^p)' = px^{p-1}$	$p \in \{-1, -2, -3, \dots\}$ oraz $x \neq 0$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, Zakres zmiennej x zależy α
$(\sin x)' = \cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$0 < a \neq 1$ oraz $x > 0$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$x > 0$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$0 < a \neq 1$ oraz $x \in \mathbb{R}$
$(e^x)' = e^x$	$x \in \mathbb{R}$

Pochodna $f(x) = x^n$

Dla $n \in \mathbb{N}$, $x, x_0 \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$ mamy:

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \dots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}.$$

Gdy $x \rightarrow x_0$ każdy ze składników sumy z prawej strony równości dąży do x_0^{n-1} . Cała suma dąży zatem do nx_0^{n-1} . Uzasadnia to równość $(x^n)' = nx^{n-1}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Pochodna funkcji wykładniczej

$$\frac{a^{x_0+\Delta x} - a^{x_0}}{\Delta x} = a^{x_0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

Istnieje dokładnie jedna wartość a , dla której

$$\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \rightarrow 1 \quad \text{gdy} \quad \Delta x \rightarrow 1;$$

jest ona równa $e = 2,718\dots$ (tę własność można przyjąć za definicję liczby e).
Stąd wynika, że

$$(e^x)' = e^x.$$

Ponieważ

$$\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \frac{\exp(\ln a \Delta x) - 1}{\Delta x},$$

otrzymujemy

$$(a^x)' = (a^x) \ln a, \quad 1 \neq a > 0.$$

Twierdzenia o pochodnych funkcji

Twierdzenie 1. (o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu oraz ilorazu funkcji).

Jeżeli funkcje f i g mają pochodne właściwe w punkcie x_0 , to

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0); \quad (2)$$

$$(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0); \quad (3)$$

$$(cf)'(x_0) = cf'(x_0), \text{ gdzie } c \in \mathbb{R}; \quad (4)$$

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0); \quad (5)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}, \text{ o ile } g(x_0) \neq 0. \quad (6)$$

Przykład

Zenek biegnie podczas zawodów sportowych. Droga przebyta przez Zenka od chwili 0 do chwili t wynosi

$$s(t) = 10t - 10e^{-0,01t}, \quad t \geq 0.$$

Należy:

- obliczyć prędkość Zenka w chwili $t > 0$;
- podać wartość prędkości Zenka dla $t = 100$.

Mamy:

$$s'(t) = (10t)' - (10e^{-0,01t})' = 10 - (-0,01)10e^{-0,01t} = 10 + 0,1e^{-0,01t}$$

i

$$v(100) = s'(100) = 10 + 0,1e^{-1} = 10,03679 \quad \text{jednostka: } m/s$$

Przykład: bieg Zenka — c.d.

Zakładamy, że punkt materialny porusza się ruchem prostoliniowym o zmiennej prędkości $v(t)$. Przyspieszenie w punkcie (chwili) t_0 definiujemy jako $v'(t_0)$.

Prędkość Zenka $v_Z(t)$ dana jest wzorem $v_Z(t) = 10 + 0,1e^{-0,01t}$, $t > 0$; jego przyspieszenie a_Z jest równe

$$a_Z(t) = v'_Z(t) = (10 + 0,1e^{-0,01t})' = -0,001e^{-0,01t}.$$

Przyspieszenie Zenka w chwili $t = 100$ jest równe

$$a_Z(100) \approx -0,00037 m/s^2.$$

Przykład: bieg Zenka — c.d.

Zenek biegnie z prędkością $v(t) = 10e^{-0,01t}$, $t \geq 0$. Należy obliczyć przyspieszenie (pochodną prędkości po czasie) Zenka w chwili $t = 100$. Mamy:

$$v'(t) = (10e^{-0,01t})' = 10(-0,1)e^{-0,01t} = -0,1e^{-0,01t},$$

i

$$v'(100) = -0,1e^{-1} = -0,03678794; \quad \text{jednostka: } m/s^2.$$

Pochodne wyższych rzędów

Pochodna funkcji f' w punkcie x_0 (o ile istnieje) będziemy oznaczać przez $f''(x_0)$. Analogicznie definiujemy trzecią pochodną funkcji f w punkcie x_0 (oznaczaną symbolem $f^{(3)}(x_0)$), czwartą pochodną $f^{(4)}(x_0)$ funkcji f w punkcie x_0 (oznaczaną symbolem $f^{(4)}(x_0)$) itd.

Uwaga nt. terminologii Pochodna $f'(x_0)$ — to pochodna pierwszego rzędu funkcji f w punkcie x_0 , $f''(x_0)$ — to pochodna drugiego rzędu funkcji f w punkcie x_0 , $f^{(3)}(x_0)$ to pochodna trzeciego rzędu funkcji f w punkcie x_0 itd.

Jeśli droga przebyta przez punkt materialny poruszający się ruchem prostoliniowym o zmiennej prędkości do chwili t oznaczymy przez $s(t)$, to przyspieszenie w punkcie t_0 rozważanego punktu materialnego będzie równa $s''(t)$.

Pochodna funkcji złożonej

Chcąc obliczyć pochodną funkcji $f(x) = e^{-x^2}$ należy skorzystać z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 2. *Jeżeli funkcja f ma pochodną właściwą w punkcie x_0 i funkcja g ma pochodną właściwą w punkcie $f(x_0)$,*

to

$$\left((g(f(x_0)))' \right)' = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Przykład

$$(e^{-x^2})' = (e^{-x^2})(-2x) = -2e^{-x^2}x$$

Pochodna funkcji złożonej: przypadek gdy funkcja wewnętrzna jest liniowa

Z twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej wynika, że:

$$(f(ax + b))' = a(f'(ax + b)).$$

W szczególności:

$$(e^{ax})' = ae^{ax}.$$

Pochodna funkcji logistycznej

Pochodna funkcji logistycznej

$$f(t) = \frac{a}{1 + be^{-ct}}$$

jest równa

$$f'(t) = \frac{(a)'(1 + be^{-ct}) - a(1 + be^{-ct})'}{(1 + be^{-ct})^2} = \frac{abce^{-ct}}{(1 + be^{-ct})^2}.$$

Dla $a = 40$, $b = 5$ i $c = 0,5$ oraz $x_0 = 5$ otrzymujemy

$$f'(x_0) = \frac{40 \cdot 5 \cdot 0,5 \cdot e^{-0,5 \cdot 5}}{(1 + 5e^{-0,5 \cdot 5})^2} = 4,126329.$$

Pochodna funkcji na przedziale

Definicja 3 (pochodnej funkcji na przedziale otwartym). *Funkcja ma pochodną właściwą na zbiorze wtedy i tylko wtedy, gdy ma pochodną właściwą w każdym punkcie tego zbioru. Funkcję określoną na zbiorze, której wartości w punktach x tego zbioru są równe $f'(x)$ nazywamy pochodną właściwą funkcji na zbiorze i oznaczamy przez f' .*

Pochodną na przedziale domkniętym B , zawartym w przedziale otwartym $\mathcal{I}$, na którym funkcja ma pochodną, definiujemy w podobny sposób.

W analogiczny sposób określamy również k -tą pochodną funkcji na przedziale B . Powiemy, że funkcja f jest k -krotnie różniczkowalna na przedziale B (zawartym w pewnym przedziale otwartym $\mathcal{I}$), jeżeli dla funkcji f istnieje k -ta pochodna przedziale B .

Pochodne wyższych rzędów— przykłady

Dla $f(x) = x^3$ (w tym przypadku obliczamy pochodne na przedziale $\mathcal{I} = \mathbb{R}$) mamy:

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2, \\f''(x) &= 6x, \\f'''(x) &= 6, \\f^{(n)}(x) &= 0 \text{ dla } n > 3.\end{aligned}$$

Pochodne wyższych rzędów— przykłady

Dla $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ (w tym przypadku obliczamy pochodne na przedziale $\mathcal{I} = (0, \infty)$) mamy:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \\f''(x) &= \frac{1}{2} \cdot (-1/2)x^{-3/2} = -\frac{1}{4} \frac{1}{x\sqrt{x}}, \\&\text{itd.}\end{aligned}$$