

# Funkcje: wielomianowa, wykładnicza, logarytmiczna — wykład 3

dr Mariusz Grządziel

Katedra Matematyki, Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu

semestr zimowy 2015/2016

# Potęgowanie

Dla dowolnej liczby dodatniej  $a$  oraz liczby wymiernej  $w = p/q$  definiujemy:

$$a^w \equiv (a^{1/q})^p.$$

Symbol „ $\equiv$ ” oznacza „równy z definicji”.

Powyższa definicja ma sens także dla  $a$  ujemnych, jeśli  $q$  jest nieparzyste.

Dla  $x$  niewymiernego możemy obliczyć zadaną dokładnością  $a^x$  znajdując wartości  $a^{x_1}, a^{x_2}, \dots$ , gdzie  $x_k$  oznacza przybliżenie dziesiętne liczby  $x$  wyrażone dokładnością do  $k$  miejsc po przecinku. Obliczanie kolejnych wartości  $a^{x_k}$  należy kontynuować do momentu, w którym błąd przybliżenia  $|a^x - a^{x_k}|$  będzie mniejszy niż zadana liczba dodatnia.

# Funkcja potęgowa

Funkcja, która przyporządkowuje argumentowi  $x \in D$ , gdzie  $D$  jest zbiorem liczb rzeczywistych lub jego odpowiednim podzbiorem, potęgę  $x^p$ , gdzie  $p$  jest liczbą rzeczywistą, nazywamy funkcją potęgową.

**Zastosowania w naukach przyrodniczych** Przy pewnych założeniach można pokazać, że stosunek powierzchni ciała zwierząt do ich masy jest proporcjonalny do odwrotności trzeciego pierwiastka z masy (czyli do  $m^{-1/3}$ , gdzie  $m$  oznacza masę zwierzęcia). Wynika stąd, że mniejsze zwierzęta muszą więcej wysiłku czasu wkładać w zdobywanie pożywienia niż zwierzęta o większej masie — por. [Wrz08, str. 71–72].

# Funkcje wielomianowe

Funkcję

$$W(x) \equiv a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

nazywamy funkcją wielomianową.

- ▶ łatwo można obliczyć ich wartość;
- ▶ mogą opisać bogactwo kształtów badanych obiektów — w naukach przyrodniczych i ekonomicznych.

# Funkcja wykładnicza

Dla  $a$  dodatniego i różnego od 1 definiujemy funkcję

$$f(x) \equiv a^x.$$

Dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$ .

Funkcja wykładnicza jest stosowana do modelowania procesów wzrostu populacji, rozpadu promieniotwórczego itd.

# Funkcja logarytmiczna

Logarytmem o podstawie  $a$ ,  $0 < a \neq 1$  z liczby dodatniej  $x$  nazywamy liczbę rzeczywistą  $y$ , dla której

$$a^y = x.$$

Funkcja logarytmiczna, dla ustalonej podstawy  $0 < a \neq 1$  przyporządkowuje argumentowi  $x > 0$  logarytm  $\log_a x$ .

# Własności funkcji— parzystość, nieparzystość

## Definicja (funkcji parzystej)

*Funkcja  $f : X \rightarrow Y$  jest parzysta, jeśli dla każdego  $x \in X$*

$$-x \in X \quad \text{oraz} \quad f(-x) = f(x).$$

*Interpretacja geometryczna: funkcja jest parzysta, gdy oś  $Oy$  jest osią symetrii jej wykresu.*

## Definicja (funkcji nieparzystej)

*Funkcja  $f : X \rightarrow Y$  jest nieparzysta, jeśli dla każdego  $x \in X$*

$$-x \in X \quad \text{oraz} \quad f(-x) = -f(x).$$

Interpretacja graficzna: funkcja jest nieparzysta, jeśli początek układu współrzędnych jest środkiem symetrii jej wykresu.

**Przykłady** Funkcje  $f_1(x) = \cos x$ ,  $f_2(x) = \cos x + x^2$  są parzyste; funkcje  $f_3(x) = \sin x$ ,  $f_4(x) = 2x^3$  są nieparzyste.

## Definicja (funkcji okresowej)

*Funkcja  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  jest okresowa, jeśli istnieje  $T > 0$  takie, że dla każdego  $x \in X$*

$$x \pm T \in X \quad \text{oraz} \quad f(x + T) = f(x).$$

*Liczbę  $T$  nazywamy okresem funkcji  $f$ . Jeżeli istnieje najmniejszy okres funkcji  $f$ , to nazywamy go okresem podstawowym.*



## Definicja

Zbiór  $A \subset \mathbb{R}$  będziemy nazywać:

- ▶ *ograniczonym z dołu, jeśli istnieje dla niego ograniczenie dolne, tj. jeśli dla każdego istnieje  $m \in \mathbb{R}$  takie, że dla każdego  $x \in A$  mamy  $m \leq x$ .*
- ▶ *ograniczonym z góry, jeśli istnieje dla niego ograniczenie górne, tj. jeśli istnieje  $M \in \mathbb{R}$  takie, że dla każdego  $x \in A$  mamy  $M \geq x$ .*
- ▶ *ograniczonym, jeśli jest ograniczony z góry i z dołu.*

## Definicja (funkcji ograniczonej)

*Funkcja  $f$  jest na zbiorze (będącym podzbiorem jej dziedziny  $D_f$ ):*

- ▶ *ograniczona z dołu, jeśli jej zbiór wartości jest ograniczony z dołu;*
- ▶ *ograniczona z góry, jeśli jej zbiór wartości jest ograniczony z góry;*
- ▶ *ograniczona, jeśli jest zarówno ograniczona z dołu jak i z góry.*

**Przykłady.** (i) Funkcja  $f(x) = \frac{1}{x}$  na zbiorze  $(0, \infty)$  jest ograniczona z dołu, ale nie jest ograniczona z góry;  
(ii) funkcja  $g(x) = x^2$  jest ograniczona na zbiorze  $[1, 2]$ .

## Definicja (funkcji rosnącej)

*Funkcja  $f$  jest rosnąca na zbiorze  $A \subset D_f$ , jeśli dla każdych  $x_1, x_2 \in A$*

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{jesli} \quad x_1 < x_2.$$

## Definicja (funkcji malejącej)

*Funkcja  $f$  jest malejąca na zbiorze  $A \subset D_f$ , jeśli dla każdych  $x_1, x_2 \in A$*

$$f(x_1) > f(x_2) \quad \text{jesli} \quad x_1 < x_2.$$

### Definicja (funkcji niemalejącej)

*Funkcja  $f$  jest niemalejąca na zbiorze  $A \subset D_f$ , jeśli dla każdych  $x_1, x_2 \in A$*

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad \text{jesli} \quad x_1 < x_2.$$

### Definicja (funkcji nierosnącej)

*Funkcja  $f$  jest nierosnąca na zbiorze  $A \subset D_f$ , jeśli dla każdych  $x_1, x_2 \in A$*

$$f(x_1) \geq f(x_2) \quad \text{jesli} \quad x_1 < x_2.$$

## Definicja (funkcji monotonicznej)

*Funkcja  $f$  jest monotoniczna na zbiorze  $A \subset D_f$ , jeśli jest nierosnąca lub niemalejąca na tym zbiorze; funkcję  $f$  nazywamy ściśle monotoniczną, jeśli jest malejąca lub rosnąca na tym zbiorze.*

# Złożenie funkcji

## Definicja

Niech  $X, Y, Y_1, Z$  będą podzbiorami  $\mathbb{R}$ ,  $Y_1 \subset Y$  oraz niech  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y_1 \rightarrow Z$ . Złożeniem funkcji  $g$  i  $f$  nazywamy funkcję  $(g \circ f): X \rightarrow Z$  określoną wzorem:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

**Przykłady.** (i) Dla  $f(x) = 2x + 1$  i  $g(x) = 2x$  (dziedziny  $D_f$  i  $D_g$  są równe  $\mathbb{R}$ ) złożenie  $g \circ f$  będzie równe funkcji  $h(x) = 4x + 2$ ,  $D_h = \mathbb{R}$ .

(ii) funkcja  $h(x) = \sin(x^2)$  może być wyrażona jako złożenie funkcji  $f(x) = x^2$  i  $g(x) = \sin(x)$  :

$$h(x) = (g \circ f)(x), \quad D_h = \mathbb{R};$$

# Pojęcie funkcji odwrotnej

Złożenie  $h(x) = g \circ f(x)$  funkcji  $g(x) = \log_2 x$ , gdzie dziedzina  $D_g$  jest równa zbiorowi liczb dodatnich i  $f(x) = 2^x$ ,  $D_f = \mathbb{R}$ , jest równa funkcji identycznościowej:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = x, \quad D_h = \mathbb{R}.$$

**Uwaga** Funkcja  $g(x) = \log_2 x$  jest funkcją odwrotną do funkcji  $f(x) = 2^x$ .

## Definicja (Funkcja odwrotna do funkcji ściśle monotonicznej)

Niech zbiór  $\mathcal{I}$  będzie odcinkiem, półprostą lub prostą. Niech  $f$  będzie funkcją ściśle monotoniczną na swojej dziedzinie  $D_f = \mathcal{I}$ . Oznaczmy zbiór wartości funkcji  $f$  przez  $Y$ . Funkcją odwrotną do  $f$  nazywamy funkcję  $h$  spełniającą warunki:

- ▶ dziedzina funkcji  $h$  jest równa  $Y$ ;
- ▶ zbiór wartości  $h$  jest równy  $\mathcal{I}$ ;
- ▶ dla każdego  $y \in Y$  jest spełniony warunek:  $y = f(x) \Rightarrow x = h(y)$ .

**Uwaga** W bardziej ogólnej definicji funkcji odwrotnej do funkcji  $f$  zakładamy jedynie, że funkcja ta jest różnowartościowa.

# Funkcje elementarne

## Definicja

*Funkcjami elementarnymi nazywamy funkcje:*

*(a) stała, potęgowa, wielomianowa, wykładnicza, logarytmiczna, trygonometryczne,...;*

*(b) wszystkie funkcje które można otrzymać z funkcji wymienionych w punkcie (a) za pomocą skończonej liczby działań arytmetycznych oraz operacji złożenia.*

**Przykłady.** Funkcjami elementarnymi są:

- ▶ funkcja  $f(x) = x^{\cos x} + \frac{1+x}{1-x}$ ;
- ▶ funkcja  $|\cdot|$  zdefiniowana przez

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x & x < 0; \end{cases}$$

zauważmy, że funkcja  $|\cdot|$  może być przedstawiona jako złożenie  $h = g \circ f$  funkcji  $f(x) = x^2$  oraz  $g(x) = \sqrt{x}$ .